پیدایش نسبیت خاص

وحیدکریمی پور_ دانشکده فیزیک _ دانشگاه صنعتی شریف

۵ فروردین ۱۴۰۱

۱ مقدمه

شکل ۱: نقش دست انسان مربوط به قبل از ۲۰ هزار سال قبل، در غار آلتامیرای اسپانیا.

طبیعت هدایای بسیاری به انسان ارزانی داشته است، لکن در مرکز این هدایا نقطه ای است که مبدء تمام تمام دانش بشریست و آن امکان بازبینی و نتیجه گیری در باره آنچه که نمی دانیم و نمی بینیم با استفاده از آنچه که می دانیم و می بینیم است. آنچه که میمون انسان نما را به بشریت امروزی رهنمون گشته قدرت حرکت ذهنی انسان در زمان و فضا و امکان بازشناخت مدارجی است که در صعود به زمان حال پیموده ایم. روی دیوارهای غارهای ماقبل تاریخ نقش دست انسان گویای این پیام ابدی است: «این نشان من است، من انسان هستم. »

[۱] قرن بیستم با دو انقلاب بزرگ در فیزیک یعنی مکانیک کوانتومی و نسبیت آغاز شد که به کلی نحوه شناخت ما از جهان را دگرگون کردند و امواج این دگرگونی به حوزه های دیگر دانش و هنر و البته تکنولوژی نیز رسید. زندگی روزمره هر کدام از ما به صورت لحظه ای از دستاوردهای این دو انقلاب تاثیر می گیرد. مکانیک کوانتومی موضوع یک درس جداگانه است. در این درس ما به موضوع نسبیت خاص و تا اندازه ای هم به نسبیت عام خواهیم پرداخت. بر خلاف مکانیک کوانتومی که حاصل تلاش جمعی گروهی از فیزیکدانان از پلانک گرفته تا دیراک است، می توان گفت که نظریه نسبیت تقریبا حاصل تلاش فردی یک نفر یعنی آلبرت اینشتین است. البته این گفته به این معنا نیست که نظریه نسبیت در خلاء متولد شده و حاصل فکر خالص بدون توجه به تلاش های فیزیکدانان دیگر و یا تجربیات پیشین و بدون اتکا به آزمایش است. مثل هر نظریه جدیدی در فیزیک، پیدایش نسبیت نیز محصول تناقضات ساختاری و تجربی در نظریه های شناخته شده فیزیک تا آن زمان بوده است و البته مثل انقلاب های بزرگ فکری حاصل شک و تردید در باره مفاهیمی است که صدها سال جامعه علمی آنها را بدیهی می انگاشته است حال آنکه اصلا بدیهی نبوده و اتفاقا نادرست بوده اند. نظریه نسبیت از یک منظر دیگر نیز با مکانیک کوانتومی فرق دارد و آن گستره مفاهیمی است که در آنها یگانگی ایجاد کرده و همه آنها را زیر یک چتر واحد گرد آورده است: فضا و زمان، ماده و انرژی، گرانش و هندسه. این درسنامه به شکلی که در سال جاری تدریس می شود، نسبتا به صورت فشرده به معرفی نسبیت خاص و عام می پردازد .

تاریخ فیزیک در قرن بیستم، تاریخ موفقیتی ابدی است. قوه تصور اجتماعی بشر هرگز نتیجه ای که از نظر اهمیت با این موفقیت قابل مقایسه باشد عرضه نکرده است. اهرام مصر، حماسه ایلیادِ هومر، اشعار و کلیساهای عظیم تاریخ بشریت را تاب مقابله با این غول عظیم نیست. مردانی که با قدرت تصور خویش مدارج مختلف این راه را پیموده اند، قهرمانان پیشتاز عصر ما را تشکیل می دهند. [آ]

[آ] عروج انسان، ژاکوب برونوفسکی، ترجمه سیاوش مشفق

[۱] عروج انسان، ژاکوب برونوفسکی، ترجمه سیاوش مشفق

۲ کدام قسمت از فیزیک می بایست اصلاح شود؟

پاسخ به این سوال در اوایل قرن بیستم واضح نبوده است. اما امروزه پاسخ اش ساده است: مکانیک نیوتنی. می توانیم باریکه ای از ذرات را تحت نیروهای ثابت نگاه داریم، همان کاری که در شتاب دهنده های بزرگ با ذرات باردار می کنیم. مطابق مکانیک نیوتنی می دانیم که به این ذرات می بایست شتاب ثابتی وارد شود و سرعت آنها به صورت خطی زیاد شود و سرانجام از سرعت نور هم بیشتر شود. ولی می بینیم که چنین چیزی رخ نمی دهد. هر چه ذرات سرعت بیشتری می گیرند شتاب دادن به آنها نیز سخت تر و سخت تر می شود و سرعت آنها هیچگاه از سرعت نور بیشتر نمی شود، گویی که در نزدیکی های سرعتِ نور، اینرسی این ذرات به سمت بی نهایت میل می کند و دیگر نمی توان به سرعت آنها افزود. آزمایش های بسیار نشان داده اند که هیچ ذره ای بیشتر از سرعت نور نمی تواند حرکت کند. به نظر می رسد که نور حد نهایی همه سرعت هاست و هیچ سرعتی بالاتر از آن امکان پذیر نیست. اما به محض این که این گزاره را بپذیریم، یک تناقض بزرگ خود را به ما نشان می دهد که از آن هیچگونه گریزی نیست. اگر ذره ای با سرعت $v = 0.9\ c$ سرعت نور حرکت کند و ما سوار سفینه ای باشیم که با سرعت $v = 0.9\ c$ در جهت عکس آن حرکت می کند، عقل سلیم به ما می گوید که سرعت ذره را می بایست $0.9 + 0.9 = 1.8\ c$ ببینیم که با ادعای قبلی ما تناقض فاحشی دارد. اما این قاعده جمع سرعت ها برآمده از ادارک بدیهی و اولیه ما از فضا و زمان است که قرن ها آن را به صورت اموری مسلم پذیرفته ایم. این امور مسلم همان اصولی است که نیوتن نیز در کتاب «اصول فلسفه طبیعی» خود آورده است یعنی:

- فضای مطلق که به خودی خود و مستقل از چیزها وجود دارد و بی حرکت است و ما تنها به وسیله موقعیت اشیاء در آن می توانیم مفهومی از فضای نسبی را درک کنیم. تغییر موقعیت چیزها در فضای مطلق حرکت مطلق و تغییر موقعیت چیزها نسبت به چیزهای دیگر حرکت نسبی است.

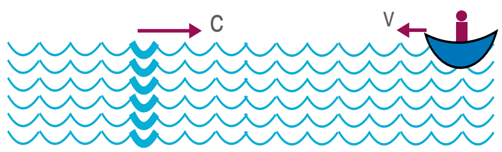
- زمان مطلق نیز مستقل از هر چیز ی در تمام جهان و به یکسان جریان دارد. تنها به وسیله حرکت اشیاء و مقایسه آنها با یکدیگر می توانیم مفهوم زمان نسبی را تعریف کنیم و اندازه بگیریم.

به این ترتیب در تمامی چارچوب های مرجع (ایستگاهی که در زمین ساکن است، قطاری که نسبت به ایستگاه حرکت می کند، کشتی که در اقیانوس حرکت می کند) زمان به یک سان یک شکل جاری است و تنها مختصات فضایی این چارچوب ها با هم فرق می کند. رابطه بین این مختصات آن چیزی است که تبدیلات گالیله نام دارد و آنها را در ابتدای درس فیزیک یاد می گیریم. بر اساس همین تبدیلات است که سرعت ها را در مثال بالا با هم جمع کرده ایم و به سرعتی بالاتر از سرعت نور رسیده ایم. اگر سرعتی بالاتر از سرعت نور وجود ندارد به این معناست که هم مکانیک نیوتنی و هم تبدیلات گالیله هر دو نادرست اند که معنایش این است که فهم و ادراک ما از فضا و زمان نیز به کلی نادرست است. این همان انقلابی است که در نظریه نسبیت برپا شده است: یعنی دگرگونی اساسی در فهم ما از زمان.

همانطور که گفتیم امروزه برای ما که به سرعت های بالا در مورد ذرات دسترسی داریم آسان است که بپذیریم مکانیک نیوتنی و به تبع آن تبدیلات گالیله نادرست اند. اما می خواهیم بفهمیم که این دگرگونی عمیق و این انقلاب فکری، بیش از صد سال پیش چگونه آغاز شده است. برای این کار می بایست داستان خود را از یک پدیده خیلی آشنا آغاز کنیم: نور.

یکی از جذاب ترین و در عین حال عمیق ترین کنکاش های دیرینه در باره ماهیت اشیاء مربوط به نور است. فیثاغورث در قرن ششم پیش از میلاد می پنداشت که نور جریانی از ذرات است، دیدگاهی که نیوتن بیش از دو هزار سال بعد نیز به آن معتقد بود. نور در خط مستقیم حرکت می کند و تشکیل سایه می دهد. وقتی به سطوح صیقلی می تابد با زاویه مساوی بازتابیده می شود و وقتی از محیط رقیقی مثل هوا یا آب به محیط غلیظی مثل شیشه وارد می شود می شکند چرا که سرعتش کم می شود. همه اینها شواهدی قاطع هستند برای این که نور از ذرات تشکیل شده است. با این وجود اعتقاد ما به ماهیت ذره ای و ماهیت موجی نور همواره در نوسان بوده و در سالهای پایانی قرن نوزدهم شکی وجود نداشت که نور واقعا موج است. می شد همه خواص گفته شده از قبیل انتشار در خط مستقیم، یا بازتاب از سطوح صیقلی و شکست نور را با ماهیت موجی آن نیز توضیح داد. اما از همه مهم تر این بود که آزمایش های هویگنس، یانگ و فرنل به طور قاطع نشان می دادند که ور پراکنده می شود و از خود تداخل نشان می دهد که بوضوح نشان دهنده ماهیت موجی آن است. حال با این سوال مهم روبرو بودیم که محیطی که امواج نور در آن منتشر می شوند چیست و کجاست؟ هر موجی چیزی نیست جز یک نوسان پیش رونده در یک محیط مادی کشسان. روی یک تار کشسان یا غشای کشسان به همین شکل موج منتشر می شود. صوت اختلالی در فشار و چگالی هواست. امواج دریا هم همین طور. این محیط هر چه که هست می بایست تمام فضا را پر کرده باشد. چه فضای اطراف زمین و چه فضای بین زمین و خورشید و ستارگان، زیرا ما ماه و ستارگان و خورشید را می بینیم. می بایست مواد شفاف را نیز پر کرده باشد چرا که می دانیم نور از این مواد عبور می کند. هم چنین می بایست دریاها را نیز تا اعماق آنها پر کرده باشد چرا که می دانیم نور در عمق دریا هم منتشر می شود. سرعت انتشار موج رابطه مستقیمی با میزان کشسانی محیط و رابطه معکوسی با چگالی جرمی آن دارد. بنابراین محیطی که نور در آن منتشر می شود می بایست بی نهایت کشسان و عین حال بی اندازه رقیق باشد. این محیط چنان رقیق است که نمی توانیم وجود آن را مثلا با اصطکاکی که برای حرکت اجسام ایجاد می کند،کشف کنیم. کره زمین صدها میلیون سال به دور خورشید چرخیده است بدون اینکه سرعت حرکت آن کم شود. کره ماه هم همین طور. بنابراین می بایست به شیوه های دیگری در جستجوی این محیط باشیم. در این جا از یک خاصیت مهم کمک می گیریم و آن اینکه سرعت انتشار موج تنها تابع خصوصیات محیط است و ربطی به منبع تولید موج ندارد. اگر با دست خود در یک استخرِ آب موجی ایجاد کنید، چه دست شما ساکن باشد و چه با سرعت حرکت کند، موجی که ایجاد می شود با یک سرعت ثابت حرکت می کند. این سرعت بستگی به چگالی آب و عمق استخر دارد نه به سرعت دست شما. هم چنین است موجی که در اثر

حرکت یک قایق در دریا ایجاد می شود یا صوتی که در اثر حرکت یک اتومبیل، یا قطار یا هواپیما ایجاد می شود. از این ویژگی می توانیم استفاده کنیم و بفهمیم که آیا ما نسبت به این محیط ساکن هستیم یا اینکه نسبت به آن در حال حرکتیم. شکل (۲) با یک مثال این وضعیت را نشان می دهد. موجی با سرعت c در یک دریا منتشر شده است. اگر مطابق شکل (۲) سوار بر قایقی باشیم که با سرعت v در دریا به سوی موج حرکت کند، سرعت آن را نسبت به خود $c+v$ اندازه می گیریم. برعکس اگر از موج با همین سرعت دور شویم، سرعت آن را $c-v$ اندازه می گیریم. به همین ترتیب می توانیم سوار بر قایقی شویم و سرعت حرکت قایق را با اندازه گیری سرعت نور نسبت به قایق خود اندازه بگیریم و مشخص کنیم که آیا قایق ما نسبت به اتر چگونه حرکت می کند. اما احتیاج به قایقی داریم که سرعت آن در مقایسه با سرعت نور بسیار ناچیز نباشد. خوشبختانه سوار بر چنین قایقی هستیم : زمین ،که از بخت خوش ما جهت حرکت اش را نیز در طول سال تغییر می دهد و اجازه می دهد که با مقایسه سرعت نور در ماه های مختلف سال چگونگی حرکت خود را در دریای اتر بسنجیم.



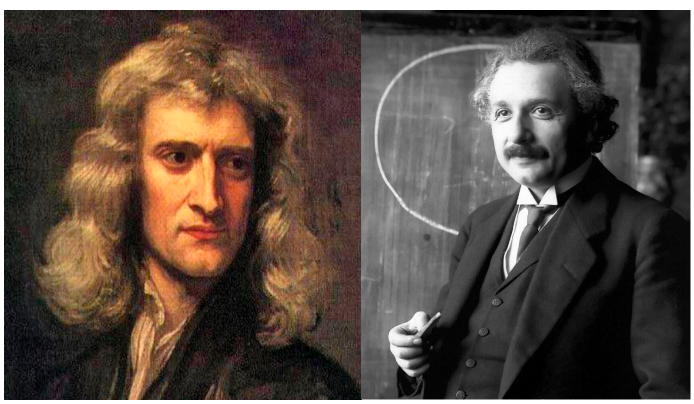
شکل ۲: موجی با سرعت c در دریا راه افتاده است. سرعت c تنها بستگی به خصوصیات دریا دارد و مستقل از هر چیز دیگری است. اگر سوار بر قایقی باشیم و به سوی موج حرکت کنیم، سرعت آن را برابر با $c+v$ اندازه می گیریم و اگر در جهت مخالف حرکت کنیم سرعت موج را $c-v$ اندازه می گیریم.

اندازه سرعت زمین به دور خورشید در حدود ۳۰ کیلومتر بر ثانیه است. این سرعت تقریبا $v=\frac{1}{10000}$ سرعت نور است. اندازه گیری تفاوت سرعت $c+v$ و $c-v$ طبیعتا بسیار سخت است. اما شیوه نبوغ آمیزی برای آن طراحی شد. این کار را مایکلسون و بعد از او مایکلسون و مورلی و بعدها نیز دیگران به شیوه های دقیق تر انجام دادند. نتیجه آن بود که تفاوتی در این دو سرعت وجود ندارد. یعنی $c-v$ با $c+v$ یکی است. در ماه های دیگر سال هم که جهت حرکت زمین تغییر می کند، بازهم سرعتی برای حرکت زمین در اتر ثبت نمی شد. نتیجه اش این است که یا $v=0$ است یا اینکه ما یک موضوع اساسی را اشتباه فهمیده ایم. این که در هر لحظه $v=0$ باشد به این معناست که ما همراه اتر حرکت می کنیم، یا به عبارت دیگر کره زمین قسمتی از اتر را که در اطراف زمین است به همراه خود می کشد. این فرض معقولی است، به همان سان که جسمی که درون آب حرکت می کند، پوسته نازکی از آب را با خود همراه می کند. اما آزمایش های هوشمندانه دیگری این فرض را نیز باطل کردند. تنها فرض منطقی که باقی می ماند این است که دریای اتر وجود ندارد. سرعت نور برای همه دستگاه ها (برای همه قایق هایی که با سرعت های مختلف در

حال حرکت هستند) همواره برابر با c است. در این صورت می بایست در تبدیلات گالیله و برداشت خود از مفاهیم زمان و فضا به کلی تجدید نظر کنیم. بخصوص باید در اندیشه زمان مطلقی که برای همه ناظرها و مستقل از هر چیز دیگری به یکسان جریان دارد شک کنیم. بخصوص باید بفهمیم که چرا صدها سال می پنداشته ایم که زمان امر مطلقی است. این همان کاری بود که آلبرت اینشتین در سال ۱۹۰۵ یعنی بیش از یک قرن پیش انجام داد. برای بحث بیشتر می بایست تبدیلات گالیله را معرفی کنیم.

دنیایی که نیوتن برپا ساخت به مدت ۲۰۰ سال بدون کوچکترین خللی پابرجا ماند و چون عقربه های یک ساعت دقیق نجومی می چرخید. بیگمان اگر روح او قبل از سال ۱۹۰۰ از سوئیس دیدن می کرد، کلیه ساعت های کشور همصدا به افتخارش زنگ های خود را به صدا در می آوردند. لکن درست پس از سال ۱۹۰۰ در شهر بِرن و در فاصله دویست قدمی برج و ساعت قدیمی شهر مرد جوانی پا به عرصه اجتماعات علمی گذارد که قصد داشت کلیه این ساعت ها را از اعتبار بیندازد. این مرد جوان آلبرت اینشتین نام داشت. [آ]

[آ] عروج انسان، ژاکوب برونوفسکی، ترجمه سیاوش مشفق



شکل ۳: ایساک نیوتن(۱۶۴۲ـ۱۷۲۷)، آلبرت اینشتین(۱۸۷۹ـ۱۹۵۵)

۱.۲ تبدیلات گالیله

دو دستگاه مختصات مثل S و S' را در نظر می گیریم. دستگاه S' نسبت به دستگاه S با سرعت ثابت v در راستای محور x حرکت می کند. اگر زمان را مطلق بگیریم، آنگاه رابطه مختصات مختلف بین این دو دستگاه آن چیزی است که به تبدیلات گالیله مشهور است و چنین نوشته می شود:

$$\begin{aligned} x &= x' + vt' \\ y &= y' \\ z &= z' \\ t &= t' \end{aligned} \tag{۱}$$

اگر دستگاه S' در یک راستای دلخواه حرکت کند، آنگاه این تبدیلات به شکل زیر نوشته خواهند شد:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{r}' + \mathbf{v}t' \\ t &= t' \end{aligned} \tag{۲}$$

این تبدیلات به رابطه ساده زیر برای سرعت ها منجر می شوند که نشان می دهد هیچ حدی برای سرعت وجود ندارد. همواره می توانیم با سرعتی دلخواه چنان حرکت کرد که سرعت یک شیء یا شعاع نور نسبت به ما هر مقدار دلخواهی را داشته باشد. بنابراین اگر تبدیلات گالیله درست باشند، یعنی اگر زمان در همه دستگاه ها یکسان بوده و مطلق باشد، سرعت نور نمی بایست مقدار ثابتی داشته باشد و اصولاً هیچ پدیده فیزیکی نمی بایست سرعت انتشار ثابتی داشته باشد.

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}' + \mathbf{v} \tag{۳}$$

از این رابطه البته نتیجه می گیریم که شتاب یک شیء در دو دستگاه مختصات مختلف که با سرعت ثابت نسبت به هم حرکت می کنند، یکسان است.

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}'. \tag{۴}$$

به دلیل همین مطلق بودن شتاب است که دستگاه مکانیک نیوتنی و رابطه $F = ma$ برقرار و سازگار باشد. اگر تبدیلات گالیله و مطلق بودن شتاب وجود نداشت، مکانیک نیوتنی هم به صورتی که می شناسیم یعنی تناسب نیرو با شتاب وجود نمی داشت.

۳ اصل نسبیت گالیله ـ نیوتن

زندگی درون کشتی های بزرگی که به آرامی روی سطح اقیانوس بی تلاطم حرکت می کنند به همان شکلی جریان دارد که روی زمین. در این کشتی ها می توان براحتی راه رفت، هر نوع بازی با توپ را انجام داد و در استخرهای آ ب شیرین آن شنا کرد. [۲] ما حرکت کشتی را به هیچ وجه حس نمی کنیم. دلیل اش این است که قوانین فیزیک (در اینجا بیشتر مکانیک) در روی کشتی و روی زمین هیچ تفاوتی با هم ندارند. این موضوع نمونه ای از اصل نسبیت گالیله است. کره زمین با سرعت ۴۰ کیلومتر در ثانیه دور خورشید می چرخد ولی ما حرکت آنها را حس نمی کنیم. در قطاری که در حال حرکت است یا هواپیمایی که در آسمان پرواز می کند نیز همین امر صادق است. در هواپیما هم همین طور. همه این ها نمونه هایی از برقراری اصل نسبیت گالیله هستند. البته اگر قطار ترمز کند یا هواپیما برای چند لحظه در چاه هوایی سقوط کند یا آب دریا دچار تلاطم شود، آنگاه اوضاع فرق می کند و ما متوجه این تغییرات می شویم. معنایش این است که دیگر قوانین مکانیک همانهایی نیستند که روی زمین برقرار بودند. برای فهم بهتر آن می بایست وضعیت ایده الی را تصور کنیم که دستگاهی که درون آن هستیم هیچ گونه لرزش یا سر و صدایی نیز ندارد. تصور کنید که درون سفینه ای قرار دارید که در فضای بیکران و با سرعت ثابت شناور است. اگر سفینه شما پنجره ای رو به بیرون نداشته باشد، به هیچ وجه نمی توانید متوجه حرکت سفینه شوید. اگر هم پنجره ای داشته باشد و از پنجره به بیرون و به فضای لایتناهی نگاه کنید متوجه نخواهید شدکه آیا شما در حال حرکت هستید و سفینه های دیگر ساکن اند یا این که شما در حال سکون هستید یا سفینه های دیگر در جهت عکس حرکت می کنند. این همان وضعیتی است که ما در ایستگاه های قطار وقتی که قطار شروع به حرکت می کند برای چند لحظه حس می کنیم.

وقتی که کشتی با سرعت ثابت حرکت می کند اصطلاحا می گوییم سوار بر یک دستگاه یا چارچوب لخت هستیم. همه چارچوب هایی که در بالا مثال زدیم تا وقتی که با سرعت ثابت حرکت می کنند نمونه هایی از دستگاه های لخت هستند. و اصل نسبیت گالیله نیز بیان می کند که قوانین مکانیک در همه دستگاه های لخت یکسان است. اما دستگاه لخت نسبت به چه چیزی سرعت ثابت دارد؟ چگونه باید یک دستگاه لخت را تمیز داد؟ پاسخ این سوال در تعریف زیر داده شده است.

- **دستگاه یا چارچوب لخت:** چارچوب لخت دستگاهی است که نسبت به ستارگان ثابت با سرعت ثابت حرکت می کند. یک تعریف دیگر هم این است: جسمی را در یک دستگاه (یک قطار، یک کشتی، یک سفینه...) درنظر بگیرید که به اندازه کافی از بقیه اجسام درون آن دستگاه دور است به نحوی که آن اجسام نمی توانند بر آن نیرو وارد کنند. اگر این جسم حرکت مستقیم الخط یکنواخت خود را حفظ کند، این دستگاه را دستگاه لخت می نامیم.

به این ترتیب قطاری که به ناگهان در ایستگاه شروع به حرکت می کند و باعث می شود که همه چیزهای روی میزی که جلوی شما قرار دارند به

[۲] !

عقب رانده شوند یک دستگاه لخت نیست. هم چنین است قطاری که به ناگهان ترمز می کند و باعث می شود که تمامی آن چیزها به جلو رانده شوند. بجز این دو لحظه در تمامی طول راه قطار یک دستگاه لخت است.

در دستگاه لخت قانون حرکت چگونه است؟ این قانون که زیربنای مکانیک نیوتنی را تشکیل می دهد، همان معادله شناخته شده نیوتن یعنی $F = ma$ است. بحث در باره مفهوم این قانون و اجزای آن را به درس مکانیک می سپاریم. در این درس نکته مهمی که باید به یاد بسپاریم این است که شتاب یک جسم در همه دستگاه های لخت است و به همین دلیل قانون نیوتن هم در همه دستگاه های لخت یکسان نوشته می شود. این همان ویژگی است که منجر به اصل نسبیت گالیله یا اصل نسبیت گالیله ـ نیوتن می شود و در ابتدای این درس آن را بیان کردیم. بیان رسمی ترش به صورت زیر است:

- **اصل نسبیت گالیله:** با هیچ آزمایش مکانیکی ای که تماما درون یک دستگاه لخت انجام می شود، نمی توان حرکت آن چارچوب را در فضای مطلق تشخیص داد. به عبارت دیگر همه دستگاه های لخت با هم معادل اند. به همین دلیل تنها می توان از حرکت نسبی دو دستگاه لخت نسبت به یک دیگر سخن گفت.

این اصل امروزه برای ما خیلی بدیهی و ساده به نظر می رسد ولی باید به یاد داشته باشیم در فیزیک ارسطویی که مدت دو هزار سال بر ذهن بشر تسلط داشته است، اجسام در حالت طبیعی شان ساکن هستند و برای آنکه حرکت کنند و سرعت داشته باشند احتیاج به نیرو دارند. اگر فیزیک ارسطویی به زبان ریاضی نوشته می شد، بجای قانون نیوتن چیزی مثل $F = mv$ می داشتیم (البته با تعریف متفاوتی از جرم). در این صورت قانون حرکت در دستگاه های لخت متفاوت به شکل های متفاوت درمی آمد و ما می توانستیم حرکت یک دستگاه لخت را با انجام آزمایش مکانیکی در آن دستگاه (و اینکه کدام قانون را برای توصیف اش به کار می بریم) تشخیص دهیم. به عبارت بهتر معنایش این بود که اصل نسبیتی وجود نداشت و بجای آن یک دستگاه مرجع مطلق می بایست وجود می داشت.

۴ مکانیک و الکترومغناطیس در پایان قرن نوزدهم

تا اواخر قرن نوزدهم مسلم شده بود که تا آنجا که به مکانیک مربوط است اصل نسبیت گالیله برقرار بود و هیچ دستگاه مرجع مطلقی نمی توانست وجود داشته باشد یا لااقل در صورت وجود با آزمایش مکانیکی تشخیص داده شود.

شاهد تکمیل و اثبات تجربی قوانین بنیادی فیزیک، شامل مکانیک، الکترومغناطیس، اپتیک، ترمودینامیک و مکانیک آماری بودیم. می دانستیم که اپتیک از الکترومغناطیس مستقل نیست چرا که نور چیزی جز امواج الکتریسته و مغناطیسی نیست. هم چنین می دانستیم که مکانیک آماری و در نتیجه ترمودینامیک را می توان بر اساس رفتار تصادفی انبوهی از ذرات که همه بر اساس قوانین مکانیک حرکت می کنند، توضیح داد. بنابراین قوانین بنیادی جهان را می شد بر اساس دینامیک نیوتن از یک سو و معادلات ماکسول توضیح داد. اصل نسبیت گالیله نیز چه از نظر تجربیات همگانی ما و چه از نظر قوانین مکانیک معتبر بود، به این معنا که قوانین مکانیک در همه دستگاه های لخت یکسان اند و با انجام آزمایش مکانیکی نمی توان حرکت یک دستگاه لخت را تشخیص داد. اما مکانیک همه فیزیک نیست. گستره وسیعی از پدیده های فیزیکی در حوزه الکترومغناطیس و نور قرار دارند و توسط معادلات ماکسول با دقت بسیار توصیف می شوند و پهنه اعتبار این قوانین نیز تمامی مقیاس های زمینی و کیهانی را دربر می گیرد. این قوانین عبارت اند از:

$$\begin{aligned}
\nabla\cdot\mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0}\\
\nabla\cdot\mathbf{B} &= 0\\
\nabla\times\mathbf{E} &= -\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B}\\
\nabla\times\mathbf{B} &= \mu_0\mathbf{J}+\epsilon_0\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E}.
\end{aligned} \qquad (۵)$$

از ترکیب این معادلات با هم می توانیم نشان دهیم که

$$\begin{aligned}
\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}-\nabla^2\mathbf{E} &= 0\\
\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{B}}{\partial t^2}-\nabla^2\mathbf{B} &= 0,
\end{aligned} \qquad (۶)$$

که در آن c یعنی سرعت انتشار این امواج برابر است با

$$c=\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}, \qquad (۷)$$

که مقدار عددی آن همان سرعت نور است. این معادلات نشان می دهند که چگونه بار و جریان الکتریکی موجب پیدایش میدان های الکتریکی و مغناطیسی می شوند و این میدان ها چگونه بر هم اثر می گذارند و نهایتا موجب پیدایش امواج الکترومغناطیسی می شوند. هم چنین نشان می دهند که نور چیزی نیست جز یک موج الکترومغناطیسی. علاوه بر این ها رابطه لورنتز یعنی

$$\mathbf{F}=q\mathbf{E}+\frac{q}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{B}, \qquad (۸)$$

نشان می دهد که چگونه میدان های الکتریکی و مغناطیسی می توانند بر ذرات باردارد ساکن یا متحرک نیرو وارد کنند.

به این ترتیب مجموعه ای از معادلات داریم که به کمک آنها می توانیم تمامی پدیده های عالم را توصیف کنیم. جهان شمولی این قوانین و وسعت پدیده هایی که توصیف می کنند از یک سو و سادگی و زیبایی آنها بی نظیر است. اما خیلی زود با این سوال مواجه می شویم که این قوانین در کدام دستگاه لخت برقرارند؟ این قوانین سرعتی را برای نور تعیین می کنند که مطلق است و توسط ثابت های الکتریکی و مغناطیسی محیط تعیین می شوند و از یک دستگاه به دستگاه دیگر طبق تبدیلات گالیله عوض نمی شود. به این ترتیب وضعیت فیزیک در پایان قرن نوزدهم به شکل زیر است:

در یک طرف تبدیلات گالیله و مکانیک نیوتنی ایستاده اند. در طرف مقابل الکترومغناطیس ماکسول ایستاده است. هر دو طرف همه پدیده های جهان را به خوبی و با دقت بسیار زیاد توصیف می کنند. از این نقطه نظر هر دو طرف دارای اعتبار فراوان و خدشه ناپذیر هستند. اما یک داور یا طرف سوم هم در اینجا وجود دارد که رای و نظر او حیاتی است و آن اصل نسبیت و یکسان بودن دستگاه های لخت است. مکانیک نیوتنی و تبدیلات گالیله کاملا با نظر داور همسو هستند. این موضوع را آزمایش نیز به خوبی تایید می کند. اما نور برای انتشار خود به یک محیط نیاز دارد که آن را اقیانوس یا دریای اتر می نامیم. اگر دریای اتر وجود داشته باشد، معنایش این است که یک دستگاه مرجع مطلق وجود دارد که معادلات ماکسول که سرعت نور را به مقدار ثابتی تعیین می کنند تنها در این چارچوب و این دریای اتر برقرارند و در چارچوب های دیگر شکل آنها تغییر می کند. به این ترتیب اصل نسبیت گالیله تنها برای پدیده های مکانیکی برقرار است و با آزمایش هایی در باره نور و پدیده های الکترومغناطیسی می توانیم حرکت چارچوب مرجع خود را در این دریای اتر تعیین کنیم. داوری نهایی بر عهده آزمایش است. این داوری همانی است که توسط آزمایش نبوغ آمیز مایکلسون و مورلی انجام شده است و نتیجه آن این بوده است که دریای اتر وجود ندارد.

■ **تمرین:** می دانیم که مطابق با معادلات ماکسول سرعت نور ثابت و برابر با مقدار $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}$ است که در آن ϵ_0 و μ_0 ضرایب ثابت الکتریکی و مغناطیسی هستند . می خواهیم نشان دهیم که معادلات ماکسول در دستگاه های لخت مختلف شکل خود را حفظ نمی کنند. برای این کار کافی است که او به رابطه بین مشتقات نگاه کنید. یعنی:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x'} &= \frac{\partial}{\partial x}\\
\frac{\partial}{\partial y'} &= \frac{\partial}{\partial y}\\
\frac{\partial}{\partial z'} &= \frac{\partial}{\partial z}\\
\frac{\partial}{\partial t'} &= \frac{\partial}{\partial t} + v\frac{\partial}{\partial x}
\end{aligned} \tag{۹}$$

و یا به صورت فشرده

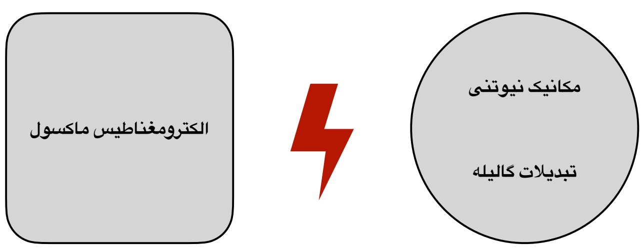
$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{r}'} &= \nabla_{\mathbf{r}} \\ \frac{\partial}{\partial t'} &= \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{r}}, \end{aligned} \quad (۱۰)$$

و سپس سعی کنید رابطه ای خطی بین میدان های الکتریکی و مغناطیسی تصور کنید مثل

$$E_i = \alpha_{ij} E'_j + \beta_{ij} B'_j \quad (۱۱)$$

و ببینید آیا می توانید ضرایب مجهول فوق را چنان تعیین کنید که شکل معادلات ماکسول در دو دستگاه یکسان شود؟ خواننده را تشویق می کنیم که سعی خود را به کار بندد. ولی پاسخ اش منفی است که معنایش این است که معادلات ماکسول شکل خود را تحت تبدیلات گالیله حفظ نمی کنند، گویی که فقط در یک دستگاه لخت خاص چنین شکلی دارند و در بقیه دستگاه های لخت شکل آنها تغییر می کند.

به این ترتیب که به صورت شماتیک در شکل (۴)



شکل ۴: ناسازگاری فیزیک کلاسیک به صورت شماتیک در ابتدای قرن بیستم.

نشان داده شده، مکانیک نیوتنی و تبدیلات گالیله در یک سو می ایستند و الکترومغناطیس ماکسول در یک سوی دیگر و یکی از این دو می بایست به نفع دیگری اصلاح شود. اگر الکترومغناطیس بر سر جای خود باقی بماند، آنگاه تبدیلات گالیله و به تبع آن مکانیک نیوتنی می بایست اصلاح شود، (مگر اینکه تبدیلات جدید بازهم به مطلق بودن شتاب بینجامند) و اگر تبدیلات گالیله و مکانیک نیوتنی بر جای خود باقی بمانند،

الکترومغناطیس ماکسول می بایست جای خود را به یک نظریه دیگر بدهد. بدیهی است وقتی نظریه های جهان شمولی از دو حوزه از فیزیک باهم ناسازگار شوند، رفع آن ناسازگاری با اصلاحات کوچک و جزئی میسر نمی شود و تنها یک انقلاب فکری که درهای یک دنیای جدید را به سوی ما می گشاید می توانیم این نظریه ها را باهم سازگار کنیم. اما نقطه شروع هر راه حلی در فیزیک تفکر و تتبع خالص نیست بلکه آزمایش است. تنها آزمایش است که داور نهایی و قاطع در باره این تناقضهاست. هیچ نوع بحث نظری و فلسفی بدون اتکا به آزمایش نمی تواند منجر به ابداع نظریه های جهان شمول جدید و در عین حال معتبر شود. در مورد تناقض بالا هم از طریق آزمایش بود که نخستین قدم ها برای فهم ناسازگاری و رفع آن برداشته شد.

معلوم نیست که آیا اینشتین جوان آخرین اخبار روز را در باره آزمایشهای مایلکسون و مورلی و دیگر آزمایش های مشابه در اختیار داشت یا خیر؟ آنچه که مسلم است این است که سالها قبل از این که به برن بیاید، زمانی که پسر بچه کوچکی بیش نبود، از خود سوال کرده بود: اگر بر روی یک اشعه نور بنشینم و با آن سفر کنم، دنیا به نظرم چگونه خواهد آمد؟ .... نبوغ مردانی چون نیوتون و اینشتین در این امر خلاصه می شود که سوالهای چنان ساده و بظاهر معصومانه طرح می کنند که هیچکس انتظار ندارد جوابی انقلابی در پی آن باشد؟ [آ]

[آ] عروج انسان، ژاکوب برونوفسکی، ترجمه سیاوش مشفق

سرعت اتوبوسی که اینشتین را به محل کار خود می برد هرگز به سرعت نور نمی رسید. این اتوبوس هر روز به آرامی در جلوی اداره ثبت اختراعات متوقف می شد، او از اتوبوس پیاده می شد، کار روزانه خود را انجام می داد و غالباً هنگام عصر در کافه بولورک [آ] توقف می کرد. کار او در اداره ثبت اختراعات زیاد خسته کننده نبود. در حقیقت غالب درخواست های ثبت اختراع آن زمان اکنون به نظر احمقانه می آیند، مانند درخواستی برای ثبت اختراع یک نوع هفت تیر بازیچه ای با کنترل جریان متناوب که اینشتین در باره اش به اختصار نوشته است:«این اختراع اشتباه، بدون دقت و ناواضح است. » [ب]

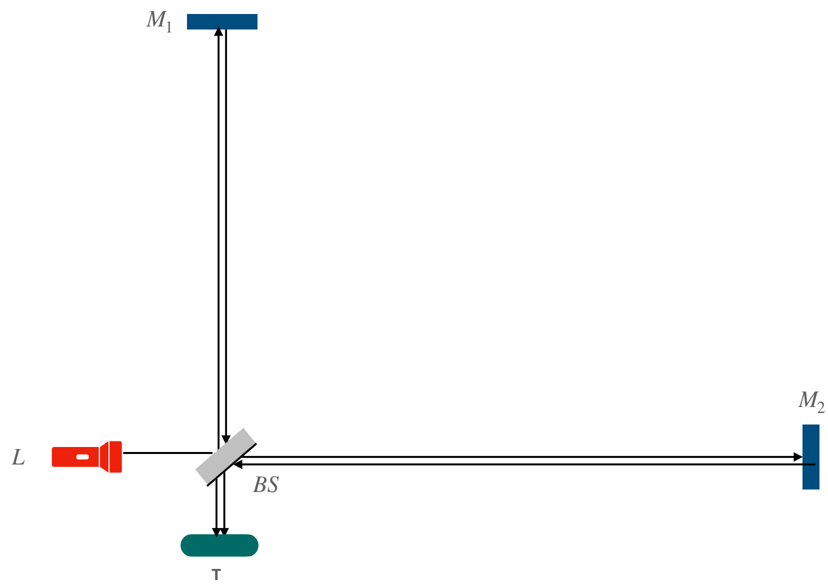
[آ] Bollwekr

[ب] عروج انسان، ژاکوب برونوفسکی، ترجمه سیاوش مشفق

۵ آزمایش مایلکسون-مورلی

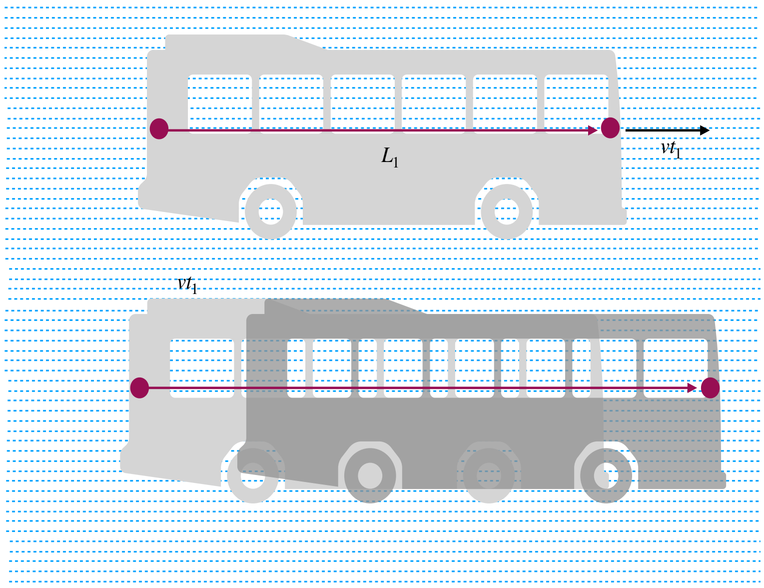
تعیین این که آیا دریای اتر یا باد اتر وجود دارد یا نه، همان کاری است که در آزمایش مشهور مایکلسون و مورلی در سال ۱۸۸۷ انجام و بعدها نیز به شیوه های مشابه تکرار شد. سرعت حرکت زمین به دور خورشید ۳۰ کیلومتر برثانیه است. در تابستان و زمستان به دلیل اختلاف جهت حرکت

زمین این اختلاف سرعت به ۶۰ کیلومتر در ثانیه می رسد. این اختلاف در مقایسه با سرعت نور حدوداً برابر است با ۱ در ۵۰۰۰. بنابراین اگر دقت آزمایش بتواند از این مرتبه باشد علی القاعده باید بتواند وجود باد اتر را ثابت کند. برای تعیین این اختلاف مایکلسون و مورلی دستگاهی را اختراع کردند که در زمان خود دقیق ترین آزمایش اندازه گیری اختلاف زمان یا اختلاف فاصله بوده است. این دستگاه تداخل سنج مایکلسون و مورلی است که شمای کلی این دستگاه که نسبت به آزمایش اصلی بسیار ساده شده در شکل (۵) نشان داده شده.



شکل ۵: شمای بسیار ساده شده ای از تداخل سنج مایکلسون ـ مورلی. M_1 و M_2 آینه هستند. شعاع نوری از چشمه نورِ L ساطع می شود و توسط شکافنده BS در دو مسیر افقی و عمودی حرکت کرده و توسط دو آینه بازتابیده می شود و سرانجام در تلسکوپ T طرح تداخلی ایجاد می کنند. (در عمل چندین شعاع نوری که از آینه های نزدیک به هم منعکس می شوند در هر دو مسیر افقی و عمودی منتشر شده و باهم تداخل می کنند.) اختلاف زمانی رسیدن این دو شعاع به تلسکوپ باعث ایجاد اختلاف فاز معینی می شود. با تغییر سرعت زمین در مسیر حرکت اش به دور خورشید این اختلاف فاز نیز تغییر کرده و باعث جابجایی اندکی در طرح تداخلی می شود. دقت آزمایش آنقدر بالاست که این جابجایی اگر وجود داشته باشد، قابل مشاهده است. آزمایش مایکلسون و مورلی و تکرار آن به شیوه های دیگر نشان داد که زمین درون اتر حرکت نمی کند.

توضیح منطق این آزمایش نیز در همان شکل آورده شده است. می توان این منطق را با توجه به شکل های (۶) و (۷) بهتر فهمید. اتوبوسی را در نظر می گیریم که در محیط اتر با سرعت v حرکت می کند. یک گوی را که سرعت آن در درون اتر ثابت و برابر با c است یک بار در جهت افقی و یک بار در جهت عمودی پرتاب می کنیم و زمان رفت و برگشت آن را اندازه می گیریم.



شکل ۶: در این شکل گوی به مثابه شعاع نوری است که در مسیر افقی حرکت می کند و پس از بازتاب از آینه ای که در انتهای بازوی افقی تداخل سنج قرار گرفته باز می گردد. سرعت نور یا همانگویی نسبت به محیط اتر (که با خط چنین نشان داده شده است) برابر با c است.

در مسیر افقی زمان رفت آن برابر است با t_1 که از رابطه زیر بدست می آید:

$$L_1 + vt_1 = ct_1. \tag{۱۲}$$

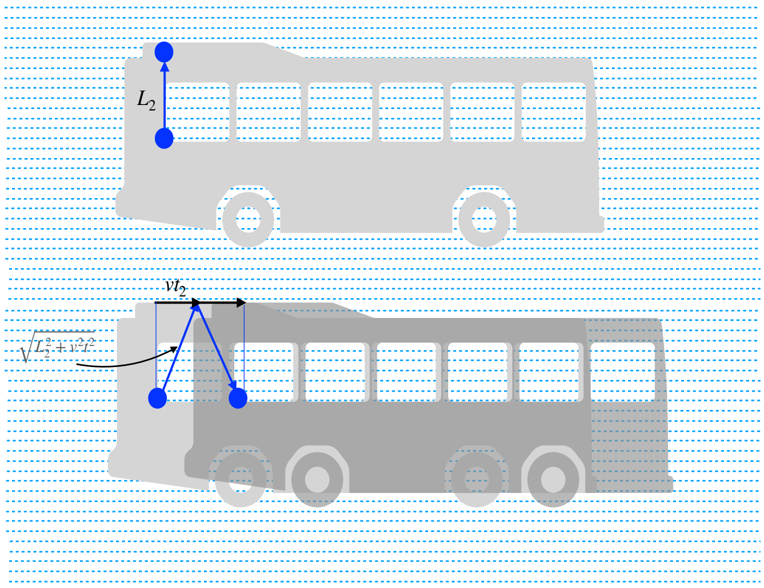
در همان مسیر افقی زمان برگشت یا t'_1 از رابطه زیر بدست می آید:

$$L_1 - vt'_1 = ct'_1 \tag{۱۳}$$

در نتیجه کل زمان رفت و برگشت برابر است با:

$$T_H = t_1 + t'_1 = \frac{L_1}{c-v} + \frac{L_1}{c+v} = \frac{2L_1 c}{c^2 - v^2} \tag{۱۴}$$

شکل (۷) یک گوی را نشان می دهد که به طرف سقف اتوبوس پرتاب می شود که البته در درون اتریک مسیر مورب را طی می کند.



شکل ۷: در این شکل گوی به مثابه شعاع نوری است که در مسیر عمودی حرکت می کند و پس از بازتاب از آینه ای که در انتهای بازوی عمودی تداخل سنج قرار گرفته باز می گردد. سرعت نور یا همانگویی نسبت به محیط اتر (که با خط چنین نشان داده شده است) برابر با c است.

زمان رفت این گوی تا سقف اتوبوس و سپس برگشت آن هر دو مساوی یک مقدار است که آن را t_2 می نامیم. این زمان از رابطه زیر بدست می آید:

$$\sqrt{L_2^2 + v^2 t_2^2} = ct_2 \tag{۱۵}$$

بنابراین کل زمان رفت و برگشت توپ در مسیر عمودی برابر است با:

$$T_V = 2t_2 = \frac{2L_2}{\sqrt{c^2 - v^2}} \tag{۱۶}$$

تفاوت زمان رفت و برگشت گوی در مسیرهای افقی و عمودی برابر است با:

$$T_H - T_V = \frac{2L_1 c}{c^2 - v^2} - \frac{2L_2}{\sqrt{c^2 - v^2}}. \tag{۱۷}$$

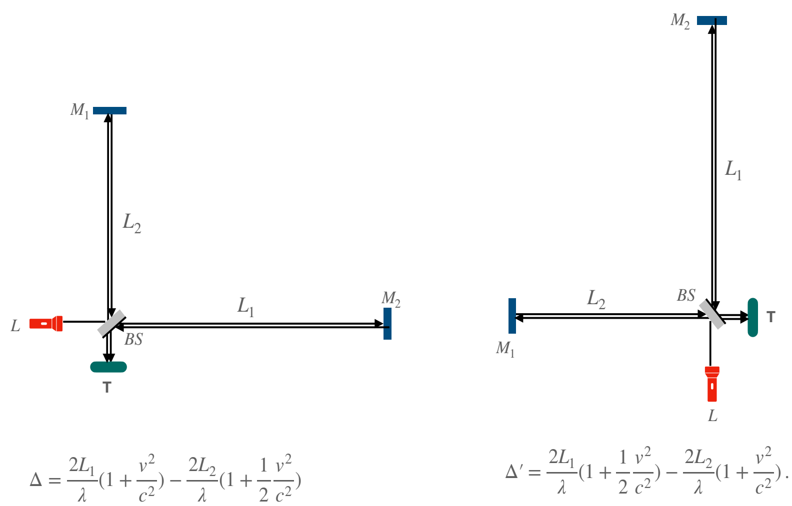
از آنجا که سرعت v نسبت به c بسیار کوچک است، این تفاوت زمانی با تقریب خیلی خوب برابر است با:

$$\Delta T = T_H - T_V \approx \frac{2L_1}{c}(1 + \frac{v^2}{c^2}) - \frac{2L_2}{c}(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}) \tag{۱۸}$$

این تفاوت زمانی باعث یک اختلاف فاز می شود که می توان بر حسب تعداد طول موج آن را به صورت زیر نوشت:

$$\Delta = c\frac{\Delta T}{\lambda} = \frac{2L_1}{\lambda}(1+\frac{v^2}{c^2}) - \frac{2L_2}{\lambda}(1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}). \qquad (۱۹)$$

این اختلاف طبیعتا باعث یک طرح تداخلی می شود که قابل مشاهده است. اما از آن چیزی نمی توان در باره سرعت زمین در اتر فهمید، زیرا همه چیز در طرف راست ثابت است و هر طرح تداخلی و اختلاف فاز را می توان به اختلاف طول بازوها نسبت داد که اختلاف اندازه آنها را با دقت خیلی زیاد نمی دانیم. اما می توانیم کل دستگاه را به اندازه ۹۰ درجه بچرخانیم که در این صورت جای بازو ها عوض خواهد شد و بازویی که عمود بر حرکت زمین بود حالا به موازات حرکت زمین قرار گرفته است و بالعلکس، شکل (۸).



شکل ۸: اختلاف فاز بین نورهایی که از آینه های M_1 و M_2 به تداخل سنج می رسد، وقتی که کل دستگاه به اندازه ۹۰ درجه می چرخد.

در نتیجه اختلاف فاز برابر خواهد شد با:

$$\Delta' = c\frac{\Delta' T}{\lambda} = \frac{2L_1}{\lambda}(1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}) - \frac{2L_2}{\lambda}(1+\frac{v^2}{c^2}). \qquad (۲۰)$$

در نتیجه این چرخش اختلاف فاز تغییر می کند و تغییر آن برابر است با:

$$\delta = \Delta - \Delta' = \frac{L_1+L_2}{\lambda}\frac{v^2}{c^2}. \qquad (۲۱)$$

در این رابطه دیگر اختلاف طول بازوها وجود ندارد. این رابطه نشان می دهد که اگر به آرامی کل دستگاه را به اندازه ۹۰ درجه بچرخانیم اختلاف فاز امواج نور رسیده به روی طیف سنج تغییر می کند و همین تغییر باعث جابجا شده نوارهای تاریک و روشن می شود. در آزمایش مایکلسون مورلی طول موج نور برابر است با $\lambda \approx 6\times 10^{-7}\ m$. مجموع طول بازوها برابر است با $L_1+L_2\approx 2.4\ m$. هم چنین $\frac{v}{c}$ برابر است با: 10^{-8}.
در نتیجه اختلاف فاز برابر خواهد شد با:

$$\delta \approx \frac{2.4\times 10^{-8}}{6\times 10^{-7}}\approx 0.04. \tag{۲۲}$$

در نتیجه انتظار می رفت که با چرخاندن دستگاه تداخل سنج، طرح تداخلی به اندازه 0.04 نوار جابجا شود. اما در کمال شگفتی مایکلسون و مورلی هیچ تفاوتی مشاهده نکردند. این موضوع می توانست نشان دهنده این باشد که در آن روزهای خاص زمین به طور استثنایی نسبت به اتر ساکن بوده است و حرکتی نداشته است. اما این آزمایش در طول ماه های سال نیز که جهت حرکت زمین به دور خورشید تغییر می کرد نیز انجام شد و نتیجه کماکان همین بود. چگونه می توان دلیل این نتیجه منفی را توضیح داد؟ یا باید بپذیریم که زمین در درون اتر ساکن است و اتر در نزدیکی های زمین به همراه آن کشیده می شود،که به آن فرض کشش اتر [۳] گفته می شود، یا باید بپذیریم که در اثر مقاومتی که ماده اتر دارد، طول ها در جهت های افقی و عمومی با حرکت زمین در درون اتر به اندازه های متفاوتی منقبض می شوند و اندازه این انقباض چنان است که اختلاف زمان مسیر نور را در بازوهای افقی و عمودی جبران می کند. این همان کاری است که لورنتز و فیتزچرالد کردند که اگر چه فرضی تصنعی است ولی نتیجه مثبتی در بر داشت که آن را به نام تبدیلات لورنتز می شناسیم. در واقع اگر فرض لورنتز-فیتزجرالد را بپذیریم می بایست بجای در روابط بالا به جای L_1 بنویسیم: $\tilde{L_1}=L_1\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$. در این صورت زمان افقی برابر می شد با:

$$\tilde{T}_H=\frac{2L_1'c}{c^2-v^2}=\frac{2L_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

و در نتیجه

$$\Delta\tilde{T}=\tilde{T}_H-\tilde{T}_V=\frac{2L_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}-\frac{2L_2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\frac{2(L_1-L_2)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

پس از چرخاندن دستگاه، خواهیم داشت:

$$\Delta\tilde{T}'=\tilde{T}'_H-\tilde{T}'_V=\frac{2L_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}-\frac{2L_2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\frac{2(L_1-L_2)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

■ **تمرین:** نشان دهید که با این فرض وقتی که دستگاه را به اندازه ۹۰ درجه می چرخانیم، هیچگونه جابجایی در طرح تداخلی نمی بایست دیده شود.

[۳] Ather Drag Hypothesis

■ **مثال:** سرعت زمین در مدارش به دور خورشید حدود ۴۰ کیلومتر بر ثانیه است. اگر فرض کنیم که طول یکی از بازو های تداخل سنج مایکلسون به طور خیلی غیرواقعی برابر با یک کیلومتر می بود در این صورت میزانی که این طول در اثر حرکت در اتر کوتاه می شد برابر می شد با:

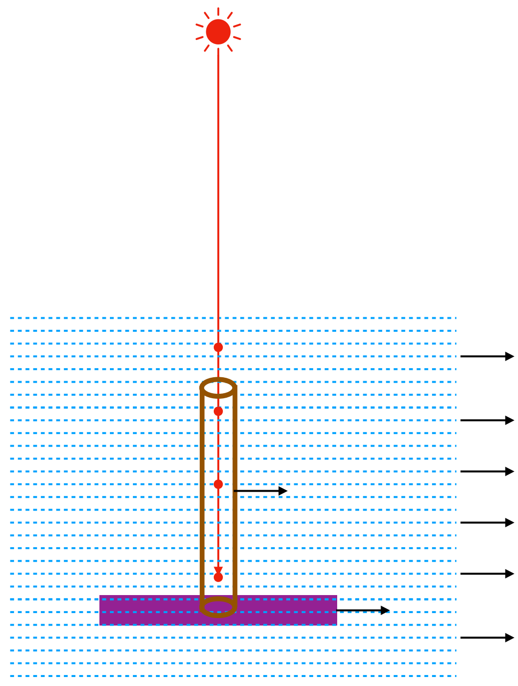
$$\delta L = L(1-\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}) \approx 10^3 \times (\frac{1}{2}\frac{40}{300000}^2) \approx 9 \times 10^-3mm. \quad (۲۳)$$

البته امروزه می دانیم مبنای درستی تبدیلات لورنتز نه فشار اتر بلکه چیز کاملا متفاوتی است. و بالاخره راه سوم هم این است که بپذیریم اصلا اتری یا دستگاه مرجع مطلقی برای انتشار نور وجود ندارد و همه دستگاه های لخت از هر نظر با یکدیگر معادل اند . این همان فرض نسبیت اینشتین است که هم طبیعی و هم ساده است. از یک سو وجود اتر را با همه ساختار پیچیده و نسبتاً متناقض اش به کناری می نهد. از سوی دیگر هم بیان می کند که دستگاه های لخت متفاوت را نه تنها با آزمایش های مکانیکی بلکه با هیچ آزمایش فیزیکی نمی توان از یکدیگر تشخیص داد و معادل بودن آنها یک امر کلی و مطلق و مستقل از نوع آزمایشهایی است که ما به کار می بریم. چنانکه خواهیم دید، با همین فرض ساده و ثابت بودن سرعت نور در همه دستگاه های مختصات براحتی می توان به تبدیلات لورنتز به عنوان جایگزین تبدیلات گالیله رسید. مهم تر از همه اینها اینشتین نشان داد که مبنای تبدیلات گالیله فرضی است که ما آن را برای صدها سال بدیهی می پنداشته ایم و حال آنکه به هیچ وجه بدیهی نیست.

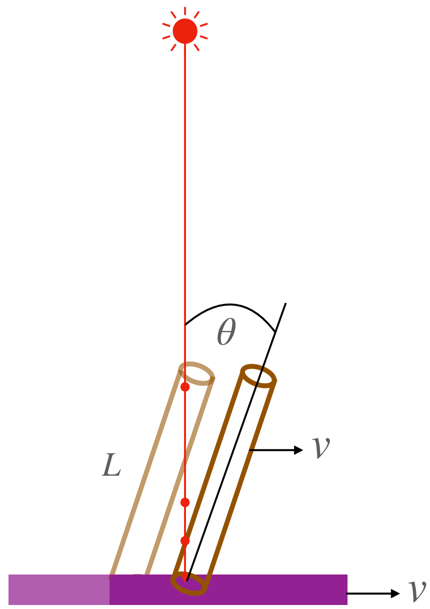
اما چرا فرض کشش اتر نادرست است؟ چرا این فرض را که منطقی نیز به نظر می رسید کنار نهادیم؟ به هر حال طبیعی به نظر می رسد که وقتی زمین درون اتر حرکت می کند، لایه هایی از اتر به همراه زمین کشیده می شوند و زمین نسبت به آن ها ساکن می شود، درست به همان گونه که برای هر جرم جامدی که درون سیالی حرکت کند، چنین خواهد شد. مثل هر فرض دیگری کشش اتر نیز سالها پژوهشگران را به خود مشغول کرد و تبعات چنین فرضی از جهات مختلف سنجیده شد. برای مطالعه تفصیلی این پژوهش ها می بایست به کتاب های تاریخ اتر و الکتریسته [۴] مراجعه کرد. در این جا به مهمترین این ایرادها موسوم به ابیراهی نور ستارگان [۵] اکتفا می کنیم. این پدیده در شکل های (۹) و (۱۰) توضیح داده شده است.

[۴]

[۵] Aberration of Starlight



شکل ۹: اگر اتر توسط زمین کشیده شود و در نتیجه زمین و تلسکوپ روی آن نسبت به اتر ساکن باشد، نور ستاره ای که از بالا وارد لوله تلسکوپ می شود، مسیر عمودی را مستقیما طی می کند تا به انتهای تلسکوپ یا عدسی چشمی تلکسوپ برسد.



شکل ۱۰: وقتی که زمین و تلکسوپی که روی آن ثابت است حرکت می کند، برای این که نور ستاره ای که از بالا وارد بتواند به انتهای تلسکوپ یعنی عدسی چشمی تلسکوپ برسد می بایست تسلکوپ را به صورت اریب قرار دهیم. مقدار زاویه محور تلسکوپ از محور عمودی برابر است با: $\tan\theta = \frac{v}{c}$. در این صورت وقتی که زمین به دور خورشید حرکت می کند و در طول سال جهت حرکت خود را تغییر می دهد، ما می بایست شاهد یک حرکت ظاهری بیضی شکل در مدار ستارگان باشیم. این مدار بیضی شکل به دلیل کوچک بودنِ $\frac{v}{c}$ بسیار کوچک ولی قابل مشاهده است. برای ستارگان مختلف واقعا این مدارهای بیضی کوچک را در موقعیت ظاهری شان می بینیم. این مشاهده نشان می دهد اتر توسط زمین کشیده نمی شود.

۶ دو اصل اساسی نسبیت

اگر چه پس از نتایج منفی آزمایش مایکلسون و مورلی کسانی چون لورنتز و فیتزجراد سعی در توضیح این نتایج با فرض هایی چون انقباض طول کردند و یا حتی به شکل بنیادی تری هانری پوآنکاره ریاضیدان برجسته فرانسوی به نسبیت و تبدیلات لورنتز به شکلی که امروزه می شناسیم نزدیک شد، اما این اینشتین بود که بنای باشکوه و زیبای نسبیت را تنها بر دو اصل ساده و در عین حال عمیق و فیزیکی بنا کرد. این اصول اینها هستند:

- **اصل اول:** تمام قوانین فیزیک در همه دستگاه های لخت یکسان هستند. به عبارت دیگر با هیچ آزمایش فیزیکی نمی توان حرکت مطلق یک دستگاه لخت را تشخیص داد.

این اصل در واقع ارتقای اصل نسبیت گالیله ـ نیوتن است به این معنا که عدم امکان تشخیص حرکت مطلق را توسط آزمایش های مکانیکی به تمامی پدیده های فیزیکی تعمیم می دهد. وقتی که خوب فکر می کنیم به سادگی و عمق این اصل پی می بریم. اگر فضای مطلق وجود ندارد، ما نباید به هیچ وجه بتوانیم حرکت مطلق را در این فضا تشخیص دهیم و بی معناست که پدیده های مکانیکی را از پدیده های فیزیکی دیگر استثنا کنیم.

- **اصل دوم:** سرعت نور در همه دستگاه های لخت یکسان است.

« در پاییز سال ۱۹۰۵ ، آینشتین مقاله ای منتشر کرد که در آن نظریه نسبیت لورنتز و پوآنکاره را با بعضی اضافات مطرح کرد که توجه زیادی جلب کرد. » از کتاب: تاریخ نظریه های اتر و نسبیت، سر ادموند تیلور ویتاکر Sir Edomnd Taylor Wittaker [آ]

[آ] این اظهار نظر به خاطر غفلت فاحشی که در تشخیص اهمیت کار اینشتین در آن بکار رفته در تاریخ علم مشهور است.

شکل ۱۱: سر ادموند تیلور ویتاکر، ریاضیدان، فیزیکدان و مورخ علم انگلیسی (۱۸۷۳ـ۱۹۵۶).

تنها با اتکا بر این دو اصل است که نظریه نسبیت خاص ساخته می شود. ده سال بعد از سال ۱۹۰۵ اینشتین که رشته این تفکر منطقی را در تمامی این سالها دنبال کرده بود به آخرین گام در این رشته تعمیم ها رسید: اگر فضای مطلق وجود ندارد، بی معناست که بتوانیم دستگاه های لخت را از دستگاه های شتاب دار استثنا کنیم. اگر فضای مطلق وجود ندارد، حرکت یک دستگاه را در فضای مطلق، چه لخت و چه شتابدار نباید بتوانیم با هیچ آزمایش فیزیکی ای تشخیص بدهیم. به عبارت دیگر تمامی قوانین فیزیک می بایست تحت تبدیلات بین همه دستگاه ها (چه لخت و چه شتابدار) یکسان باشند. این سرآغاز نظریه نسبیت عمومی و گرانش است و موضوعی است که در فصل های آینده به آن خواهیم پرداخت.

این برداشت بوضوح با تشریح نیوتن از طبیعت اختلاف دارد. برای نیوتون زمان و فضا شبکه مطلقی را تشکیل می دهند که در آن حوادث مادی این دنیا با نظمی غیر قابل تغییر در جریان اند. برداشت او از دنیا به دید پرودگار از جهان می ماند: هر کس که با آن نگاه کند، هر کجا که باشد و با هر سرعتی که سفر کند، تنها یک واقعیت واحد را می بیند. بر عکس برداشت اینشتین از دنیا دیدِ یک انسان را نشان می دهد که در آن آنچه شما می بینید با آنچه که من می بینیم تفاوت دارد به این معنی که برداشت های ما به مکان و سرعت ما نسبت به یکدیگر بستگی دارد. این نسبیت را نمی توان از بین برد. ما هرگز به واقعیت دنیا، آنچنان که هست، پی نخواهیم برد. تنها می توانیم برداشت های مختلف مان را بوسیله رد و بدل کردن پیامها و اطلاعات با یکدیگر مقایسه کنیم. [آ]

[آ] عروج انسان، ژاکوب برونوفسکی، ترجمه سیاوش مشفق

برداشت اینشتین از طبیعت برداشت یک انسان در مقابل عاملی خداگونه بود و همواره این برداشت خود را در باره طبیعت اظهار می داشت. او دوست داشت به جای طبیعت در باره خدا صحبت کند: «خداوند طاس بازی نمی کند.» «خدا بدجنس نیست.» تا اینکه یک روز بالاخره نیلز بوهر به او گفت:«بهتر است از این که به خدا بگویی چه کند، دست برداری.». اما این گفته حق او را ادا نمی کند. اینشتین قادر بود سوالاتی بی اندازه ساده از خود بپرسد. زندگی و محصول کار او نشان داده است که هرگاه در مقابل این سوالها جواب های ساده ای یافت شوند، گویی صدای تفکر خداوند را می توان شنید. [آ]

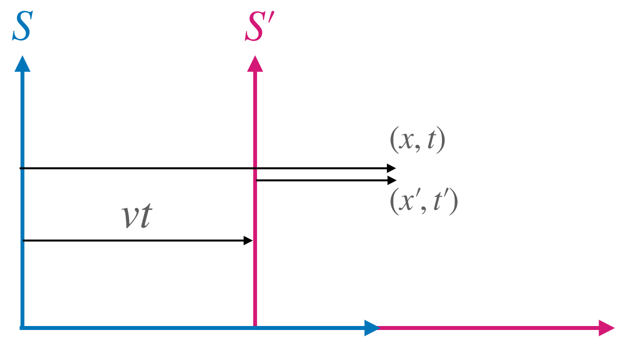
[آ] عروج انسان، ژاکوب برونوفسکی، ترجمه سیاوش مشفق

۷ تبدیلات لورنتز

اگر بپذیریم که سرعت نور در همه دستگاه های مختصات می بایست یکسان باشد، در این صورت حتما می بایست تبدیلات گالیله را با تبدیلات دیگری جایگزین کنیم، چرا که تبدیلات گالیله به وضوح با اصل تغییرناپذیری سرعت نور مغایرند. تبدیلاتی که جایگزین تبدیلات گالیله می شوند، تبدیلات لورنتز نام دارند، چرا که اولین بار لورنتز این تبدیلات را نوشت اگرچه این اینشتین بود که هم دلیل فیزیکی و مفهومی آن را بهتر از هر کسی فهمید و هم روش بسیار ساده ای برای استخراج آنها به کار بست. در این جا سعی می کنیم این تبدیلات را به ساده ترین شکل ممکن بدست بیاوریم. این سادگی قبل از هر چیز در فرض هایی که اینشتین کرده است خود را نشان می دهد. نخستین فرض او این است که این تبدیلات خطی هستند. (وقتی که می توانیم با تبدیلات خطی به مقصود خود برسیم چرا بیهوده به سراغ تبدیلات پیچیده غیر خطی برویم که ترکیب آنها باهم هم بسیار دشوار است؟) بنابراین می نویسیم

$$\begin{aligned} x &= \alpha x' + \beta t' \\ t &= \gamma x' + \delta t', \end{aligned} \tag{۲۴}$$

که ضرایب نوشته شده را می بایست پیدا کنیم. هم چنین فرض کرده ایم که مختصات عمود بر سرعت که در جهت x است تغییر نمی کنند. (کمی بعد دلیل این را توضیح می دهیم.) شکل (۱۲) نشان دهنده این دو دستگاه است.



شکل ۱۲: دو دستگاه S و S' که نسبت به هم با سرعت v حرکت می کنند. سرعت در راستای محور x است.

حال توجه می کنیم که نقطه $x' = 0$ یعنی مبداء مختصات دستگاه S' از دید ناظرِ S با سرعت v به سمت راست حرکت می کند. بنابراین بدست می آوریم:

$$v = \frac{x}{t} = \frac{\beta}{\delta} \quad \longrightarrow \quad \beta = \delta v. \tag{۲۵}$$

هم چنین توجه می کنیم که نقطه $x = 0$ یعنی مبداء مختصات دستگاه S از دید ناظر S' با سرعتِ $-v$ به سمت چپ حرکت می کند. بنابراین بدست می آوریم:

$$-v = \frac{x'}{t'} = \frac{-\beta}{\alpha} \quad \longrightarrow \quad \beta = \alpha v. \tag{۲۶}$$

با این روابطی که تا کنون بدست آورده ایم تبدیلات ما به شکل زیر ساده شده است:

$$\begin{aligned} x &= \alpha(x' + vt') \\ t &= \gamma x' + \alpha t'. \end{aligned} \tag{۲۷}$$

تا کنون از فرض یکسان بودن سرعت نور استفاده نکرده ایم. حال شعاع نوری را در نظر می گیریم که در راستای محور x حرکت می کند. تساوی سرعت نور در دو دستگاه منجر می شود به

$$c = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\alpha \Delta x' + \alpha v \Delta t'}{\gamma \Delta x' + \alpha \Delta t'} = \frac{\alpha c + \alpha v}{\gamma c + \alpha} \tag{۲۸}$$

و یا

$$\gamma c^2 + \alpha c = \alpha(c+v) \tag{۲۹}$$

که در نتیجه آن خواهیم داشت

$$\gamma = \frac{v}{c^2}\alpha. \tag{۳۰}$$

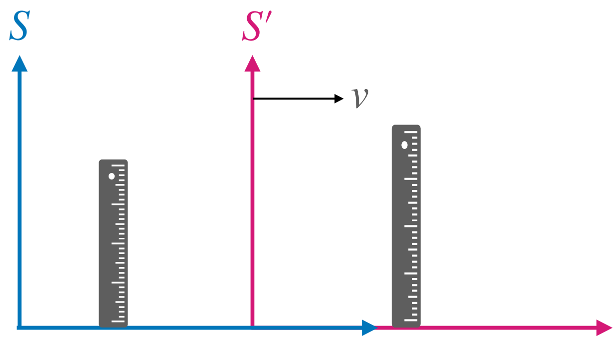
بنابراین تبدیلات به شکل زیر در می آیند:

$$\begin{aligned} x &= \alpha(x' + vt') \\ t &= \alpha(\frac{v}{c^2}x' + t'). \end{aligned} \tag{۳۱}$$

ولی هنوز یک ضریب تعیین نشده است. معلوم است که چیزی را در نظر نگرفته ایم . در واقع جهت حرکت شعاع نور را به طور استثنایی در جهت حرکت دو دستگاه گرفتیم و طبیعی است که این انتخاب خاص منجر به حل کامل مجهولات نشود. بنابراین یک بارهم جهت حرکت شعاع نور را در دستگاه S' در راستای y' می گیریم و تقاضا می کنیم که سرعت نور در هر دو دستگاه برابر با c باشد. در اینجا می بایست به تبدیلاتی که تا کنون نوشتیم تبدیل مختصه y را نیز اضافه کنیم. اگر جهت حرکت در راستای محور x باشد، قرار می دهیم

$$\begin{aligned} y &= y' \\ z &= z'. \end{aligned} \tag{۳۲}$$

یعنی اندازه ها در راستای عمود بر محور حرکت دو دستگاه تغییری نمی کنند. مبنای چنین فرضی چیست؟ مبنای آن خیلی ساده است و ناشی از تقارن است.، شکل (۱۳).



شکل ۱۳: دستگاه S' با سرعت v نسبت به دستگاه S به طرف راست حرکت می کند. دستگاه S نسبت به دستگاه S' با همان سرعت به طرف چپ حرکت بکند. اگر طول یک خط کش که در راستای عمود بر جهت حرکت قرار دارد در دستگاه S نسبت به دستگاه S' کوتاه تر شود، به این معناست که طول همان خط کش در دستگاه S' نسبت به دستگاه S بلندتر می شود. این وضعیت فقط وقتی امکان پذیر است که ما جهت راست را بر جهت چپ ترجیح دهیم که هیچ دلیل منطقی ای برای آن وجود ندارد.

خط کشی را در نظر بگیرید که در دستگاه S' ساکن است. اگر طول این خط کش در دستگاه S نسبت کمتر یا بیشتر از طول اش در دستگاه S' باشد با یک تناقض روبرو می شویم. زیرا این دو دستگاه اصولا فرقی با هم ندارند و تنها با سرعت v از هم دور می شوند. بنابراین طول های در راستای عمود بر حرکت حتما باید یکسان باقی بمانند. به مسئله تبدیل سرعت ها باز می گردیم. برای شعاع نوری که در دستگاه S' در راستای y' حرکت می کند، داریم:

$$\begin{aligned} \Delta x &= \alpha v \Delta t' \\ \Delta y &= \Delta y' \\ \Delta t &= \alpha \Delta t'. \end{aligned} \tag{۳۳}$$

با یک محاسبه هندسی ساده داریم:

$$c^2 = \frac{\Delta x^2 + \Delta y^2}{\Delta t^2} = \frac{\alpha^2 v^2 + c^2}{\alpha^2}. \tag{۳۴}$$

و یا

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{۳۵}$$

در نتیجه تبدیلات لورنتز به صورت کامل به صورت زیر در می آید:

$$\begin{aligned} x &= \frac{x' + vt'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ y &= y' \\ z &= z' \\ t &= \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{aligned} \tag{۳۶}$$

رسم شده است که این روابط را به صورت زیر بنویسند که

$$\begin{aligned} x &= \gamma(x' + vt') \\ y &= y' \\ z &= z' \\ t &= \gamma(t' + \frac{v}{c^2}x') \end{aligned} \tag{۳۷}$$

که در آن γ ضریب زیر است که در حقیقت ضریبی است که در استخراج بالا با نماد α نشان داده شد. حال که از استخراج تبدیلات لورنتز رها شده ایم، از این به بعد همین نماد را به کار خواهیم برد.

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{۳۸}$$

بدیهی است که روابط بالا براحتی با جایگزینی v با $-v$ به روابط زیر تبدیل می شوند:

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \gamma(t - \frac{v}{c^2}x) \end{aligned} \tag{۳۹}$$

اگر چه برای استخراج این تبدیلات فقط دو راستای متفاوت را برای سرعت نور در نظر گرفتیم اما می توانیم نشان دهیم که نور در هر راستایی که منتشر شود، سرعت اش در دستگاه های مختلف یکسان است. برای این کار توجه می کنیم که از تبدیلات لورنتز براحتی می توان رابطه زیر را بدست آورد:

$$c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = c^2t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2. \tag{۴۰}$$

اگر قرار دهیم $s^2 := c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2$ در واقع سطح $s^2 = 0$ نشان دهنده سطح کروی موجی است که با سرعت c در حال انتشار است و رابطه بالا نشان می دهد که این سطح کروی در هر دو دستگاه با سرعت یکسان در حال انتشار است.

- تمرین: شعاع نوری را در نظر بگیرید که در دستگاه S' و در صفحه $x' - y'$ با زاویه θ نسبت به محورِ x' منتشر می شود. سرعت این شعاع نور را در دستگاه S و زاویه آن را نسبت به محورِ x بدست آورید.

۸ انبساط زمان و انقباض طول

انبساط زمان و انقباض طول، بخصوص اولی، یکی از وجوه شگفت انگیز نسبیت هستند. این دو را به سادگی می توان از تبدیلات لورنتز نتیجه گرفت. طبیعتاً می بایست برای پرهیز از اشتباه به معنای آنها و شرایط دقیق آنها دقت کرد. نخست به انبساط زمان می پردازیم. فرض کنید که ساعتی در دستگاه S' قرار دارد که در جای خود، ساکن است. دو رویداد E_1 و E_2 که در محل این ساعت اتفاق می افتند (این دو رویداد می توانند دو تیک متوالی خود این ساعت باشند)، دارای مختصات زیر هستند:

$$E_1 \equiv (x', t_1'), \qquad E_2 \equiv (x', t_2').$$

از تبدیل لورنتز زمان این دو رویداد به شکل زیر خواهد بود:

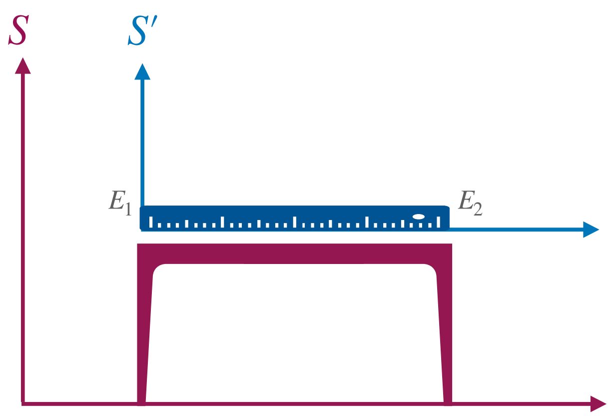
$$t_1 = \gamma(t_1' + \frac{v}{c^2}x'), \qquad t_2 = \gamma(t_2' + \frac{v}{c^2}x')$$

و در نتیجه

$$t_1 - t_2 = \gamma(t_1' - t_2'), \tag{۴۱}$$

که به این معناست که فاصله زمانی آن دو رویداد (فاصله زمانی بین دو تیک متوالی ساعت) به اندازه ضریب γ بزرگ شده است. وقتی که سرعت دستگاه S به سرعت نور نزدیک می شود، فاصله زمانی این دو تیک متوالی نیز به سوی بی نهایت میل میکند، چنان که گویی زمان متوقف شده است.

حال به انقباض طول می پردازیم: میزی را در نظر بگیرید که می خواهید طول اش را اندازه گیری کنید. شما در حال حرکت هستید و سرعت تان نسبت به میز برابر با v است. یک مقیاس متر دست شماست. کاری که برای اندازه گیری می کنید این است که ابتدای میز را با نقطه مبداء متر میزان می کنید و بعد می سنجید که انتهای میز با کدام نقطه از مقیاس متر شما منطبق است. تفاوت دو عددی که می خوانید طول میز را به شما می دهد. ولی نکته مهم این است که این دو کار را می بایست در یک زمان انجام دهید در غیر این صورت طول میز را کمتر یا بیشتر از مقدار واقعی اش اندازه خواهید گرفت. در این جا ما با دو رویداد ساده مواجه هستیم که همان رویدادهای میزان کردن متر بر ابتدا و انتهای میز است. شکل (۱۴).



شکل ۱۴: دو رویداد E_1 و E_2 عبارت اند از منطبق کردن ابتدای متر و نقطه ای از آن با ابتدا و انتهای میز. این دو رویداد می بایست در یک زمان از دید ناظری که اندازه گیری را انجام می دهد یعنی S' انجام شوند تا اندازه گیری طول میز معتبر باشد.

بنابر تبدیلات لورنتز داریم:

$$\begin{aligned} x &= \gamma(x' + vt') \\ x + L &= \gamma(x' + L' + vt') \end{aligned} \qquad (۴۲)$$

که از آن نتیجه می گیریم

$$L' = \frac{L}{\gamma} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} L. \qquad (۴۳)$$

یعنی طول میز را کمتر از مقدارِ در حال سکونِ آن اندازه می گیریم.

۹ تبدیل سرعت و شتاب

تبدیلات لورنتز رابطه بین مختصات فضا–زمانی را بدست می دهد. از این روابط می توانیم تبدیلات سرعت و شتاب را براحتی بدست آوریم. از تعریف سرعت بدست می آوریم:

$$u_x = \frac{dx}{dt} = \frac{\gamma(dx' + vt')}{\gamma(dt' + \frac{v}{c^2}dx)} = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{u'_x v}{c^2}} \qquad (۴۴)$$

که نشان می دهد سرعت ها در راستای حرکت دو دستگاه چگونه تبدیل می شوند:

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{u'_x v}{c^2}}. \qquad (۴۵)$$

هم چنین بدست می آوریم:

$$u_y = \frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{\gamma(dt' + \frac{v}{c^2}dx')} = \frac{u'_y}{\gamma(1 + \frac{u'_x v}{c^2})} \qquad (۴۶)$$

که نشان می دهد سرعت ها در راستای عمود بر حرکت چگونه تبدیل می شوند:

$$u_y = \frac{u'_y}{\gamma(1 + \frac{u'_x v}{c^2})} \qquad (۴۷)$$

به این ترتیب می توان تبدیل سرعت های دلخواه را با تجزیه کردن آنها به مولفه های موازی و عمود بر حرکت بدست آورد. اگر خیلی مشتاق روابط کلی باشیم می توانیم دو رابطه اخیر را با هم ترکیب کنیم و به رابطه زیر برسیم:

$$\mathbf{u} \equiv \mathbf{u}_{\parallel} + \mathbf{u}_{\perp} = \frac{\mathbf{u}' + \mathbf{v}}{1 + \frac{\mathbf{u}'\cdot\mathbf{v}}{c^2}} + \frac{\mathbf{u}'_{\perp}}{\gamma(1 + \frac{\mathbf{u}'\cdot\mathbf{v}}{c^2})} \qquad (۴۸)$$

به همین ترتیب می توان رابطه شتاب ها را نیز در دو دستگاه مختصات بدست آورد.

■ تمرین: نشان دهید که رابطه بین شتاب ها در دو دستگاه مختصات به شکل زیر است:

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{1}{\gamma^3(1+\frac{u'_x v}{c^2})^3}a'_x, \\ a_y &= \frac{1}{\gamma^2(1+\frac{u'_x v}{c^2})^2}a'_y - \frac{v}{c^2\gamma^2(1+\frac{u'_x v}{c^2})^3}u'_y a'_x. \end{aligned} \quad (۴۹)$$

۱.۹ حرکت با شتاب ثابت

ذره ای را در نظر بگیرید که در دستگاهی که متصل به آن است و همراه آن حرکت می کند شتاب ثابتی برابر با $\mathbf{a}' = (a,0,0)$ دارد. چنین دستگاهی معمولا دستگاه هم-حرکت [۶] خوانده می شود. می خواهیم ببینیم معادله حرکت این ذره در یک دستگاه ساکن چیست؟ دستگاه ساکن را S و دستگاه همراه با ذره را S' می گیریم. به این ترتیب در تمامی رابطه ها می بایست قرار دهیم $u'_x = u'_y = 0$ زیرا در دستگاه همراه ذره، سرعت لحظه ای ذره برابر با صفر است. در دستگاه ساکن سرعت ذره برابر است با u_x که البته با زمان تغییر می کند. نکته مهم این است که u_x سرعت لحظه ای دستگاه S' نسبت به دستگاه S هم هست. یعنی در همه روابط بالا به جای v که سرعت حرکت دو دستگاه نسبت به هم است باید قرار دهیم $v = u_x$. نخست از تبدیلات شتاب و سرعت بدست می آوریم که شتاب و سرعت عمودی این ذره در درستگاه ساکن نیز برابر با صفر است.. بنابراین تنها تبدیلات مولفه افقی شتاب و سرعت را در نظر می گیریم . از تبدیل شتاب بدست می آوریم:

$$a_x \equiv \frac{du_x}{dt} = \frac{1}{\gamma^3}a = (1-\frac{u_x^2}{c^2})^{\frac{3}{2}}a \quad (۵۰)$$

برای حل این معادله از تغییر متغیر زیر استفاده می کنیم:

$$u_x(t) = c\tanh\theta(t) \quad (۵۱)$$

که در نتیجه آن معادله به صورت زیر در می آید:

$$c\cosh\theta(t)\frac{d\theta(t)}{dt} = a \quad (۵۲)$$

و یا

$$c\sinh\theta(t) = at + c\sinh\theta(0). \quad (۵۳)$$

[۶] Co-Moving

در اینجا $\theta(0)$ مقدارثابتی است که می بایست ازشرایط اولیه تعیین شود. فرض می کنیم که لحظه $t=0$ را لحظه ای انتخاب کرده ایم که سرعت ذره نسبت به دستگاه ساکن نیز برابر با صفر بوده است. با این انتخاب می بایست قرار دهیم $\theta(0)=0$ یا

$$c\sinh\theta(t)=at. \tag{۵۴}$$

با جایگذاری در تعریف $u_x(t)=c\tanh\theta(t)$

بدست می آوریم

$$u_x(t)=\frac{at}{\sqrt{1+\frac{a^2t^2}{c^2}}}. \tag{۵۵}$$

از همین رابطه یک چیز روشن می شود و آن اینکه هر چقدر هم با شتاب ثابت حرکت کند هیچوقت سرعت آن از سرعت نور بیشتر نمی شود و در زمان بی نهایت نهایتا سرعت آن با سرعت نور برابر می شود. برای بدست آوردن مسیر حرکت کافی است معادله دیفرانسیل بالا را به صورت زیر بنویسیم و حل کنیم:

$$\frac{dx}{dt}=at(1+\frac{a^2t^2}{c^2})^{-\frac{1}{2}} \tag{۵۶}$$

و یا

$$\frac{dx}{dt}=\frac{c^2}{a}\frac{d}{dt}(1+\frac{a^2t^2}{c^2})^{\frac{1}{2}} \tag{۵۷}$$

و در نتیجه

$$x(t)=\frac{c^2}{a}\sqrt{1+\frac{a^2t^2}{c^2}}+const \tag{۵۸}$$

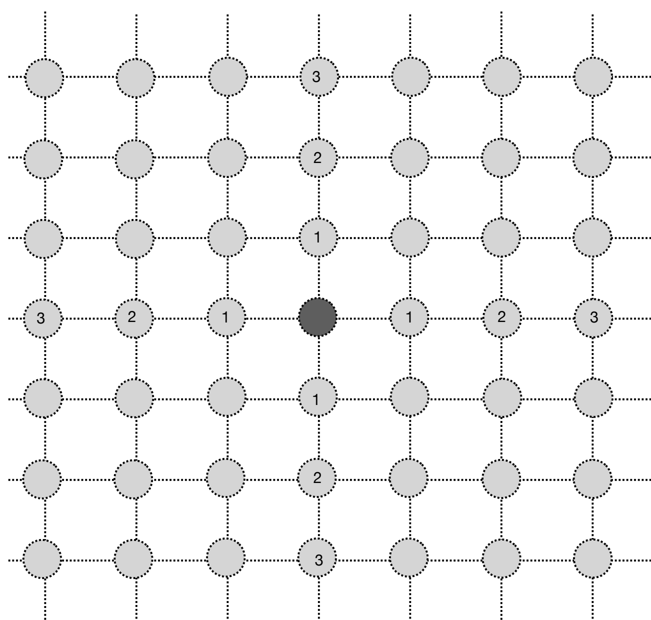
اگر در لحظه صفر، ذره در مبداء مختصات دستگاه S بوده باشد، آنگاه رابطه نهایی به شکل زیر در می آید:

$$x(t)=\frac{c^2}{a}\sqrt{1+\frac{a^2t^2}{c^2}}-\frac{c^2}{a}. \tag{۵۹}$$

با بسط بر حسب زمان می فهمیم که در لحظات اولیه وقتی $at<<c$ است، رابطه سینماتیک نیوتنی یعنی $x(t)=\frac{1}{2}at^2+\cdots$ برقرار است.

۱۰ معنای ناظر در نسبیت خاص

منظور از یک ناظر [۷] در نسبیت خاص چیست؟ منظور دستگاه مختصاتی [۸] است که علی الاصول تمام فضای سه بعدی را می پوشاند و تمام نقاط آن مختصات اندازه گیری شده معین دارند و در تمام نقاط آن نیز مجموعه ای از ساعت های همزمان قرار گرفته اند که می توانند مختصات سه گانه و هم چنین زمان وقوع هر رویدادی [۹] را به دقت ثبت کنند. بنابراین ناظر عملا یک شخص نیست بلکه این مجموعه ثبت کننده های مکان و زمان است که به اختصار ناظر خوانده می شود. همواره باید به یاد داشته باشیم که ناظر یک شخص نیست بلکه همین دستگاه مختصات و ساعت های همزمان است. یک نمونه از ناظر در شکل (۱۵) نشان داده شده است.



شکل ۱۵: شبکه همزمان ساعت ها که یک ناظر را در دستگاه لخت تعریف می کند. هر رویدادی که رخ می دهد ساعتی که درست درجای آن رویداد قرار دارد سه مختصه مکانی و یک مختصه زمانی آن رویداد را ثبت می کند. این آن چیزی است که در نسبیت به آن ناظر می گوییم.

[۷] Observer
[۸] Frame of Reference
[۹] Event

سوال مهم این است که چگونه می توانیم یک ناظر را عملا برپا کنیم. می توانیم از یک نقطه شروع به حرکت کنیم و در سه جهت عمود بر هم طول های را اندازه گیری کنیم و به هر نقطه سه مختصه دقیق (x, y, z) نسبت دهیم. آنچه که باقی می ماند همزمان کردن ساعت هاست. برای این کار می توانیم در مبداء مختصات قرار بگیریم و ساعت مبداء را برابر با لحظه صفر قرار دهیم. سپس یک علامت را به همه ساعت ها بفرستیم چنان که این علامت به محض رسیدن به هر ساعت، آن را فعال کند و ساعت از آن لحظه به بعد شروع به کار کند. این علامت را می توانیم علامت نور قرار دهیم که می دانیم سرعت آن یک ثابت جهانی است و به انرژی یا فرکانس بستگی ندارد. تنها کاری که باید بکنیم این است که زمان رسیدن نور به هر ساعت را به حساب بیاوریم. بنابراین مطابق شکل (۱۵) ساعتی را که در فاصله یک ثانیه نوری قرار گرفته در ثانیه یک و ساعتی را که در فاصله دو ثانیه نوری قرار گرفته در ثانیه دو قرار می دهیم و الی آخر. به این ترتیب مطمئن هستیم که وقتی نور به ساعت ها می رسد و آنها را فعال می کند، همه با هم همزمان هستند. البته در اینجا یک فرض فوق العاده مهم به کار رفته است و آن اینکه سرعت نور ثابت است و در همه جهات به یک اندازه است. به عبارت دیگر فرض شده است دستگاه مرجع مطلقی مثل اتر وجود ندارد که تنها در آن دستگاه سرعت انتشار نور برابر با c باشد. اگر غیر از این می بود چنین روشی تنها برای دستگاهی که نسبت به اتر ساکن است کار می کرد و برای یک دستگاه دیگر نخست می بایست سرعت آن را نسبت به اتر مشخص می کردیم و با استفاده از آن سرعت نور را در جهات معین محاسبه می کردیم و این اختلاف سرعت ها را در همزمان کردن ساعت ها مورد توجه قرار می دادیم. خوشبختانه می دانیم که دستگاه مطلقی مثل اتر وجود ندارد و سرعت نور در همه دستگاه های مختصات یکسان است و در نتیجه با همین روش ساده می توانیم یک دستگاه مختصات یا به اصطلاح یک ناظر بسازیم.

۱۱ همزمانی

هر نظریه بزرگی یکی از مفاهیمی را که قرن ها آن را بدیهی می پنداشته ایم زیر سوال می برد. نسبیت از این نظر جایگاه بسیار ویژه ای دارد چرا که یک مفهوم فوق العاده بدیهی را با سوال مواجه کرد. چگونه می توانیم بفهمیم که دو رویداد همزمان رخ داده اند. بصیرت مهم اینشتین این بود که نشان داد: «ما فقط می توانیم در باره همزمانی دو رویداد که در یک نقطه در جلوی چشمان ما رخ می دهند حکم کنیم و نه بیشتر!» هر حکمی در باره همزمانی رویدادهایی که در نقاط دور از هم رخ می دهد احتیاج به یک بنیان نظری در باره سرعت انتشار علامت ها (مثلا صوت یا نور) و چگونگی وابستگی این سرعت ها به دستگاه ناظر دارد. به این ترتیب همزمانی دو رویداد در دو نقطه متفاوت را نمی توان به عنوان

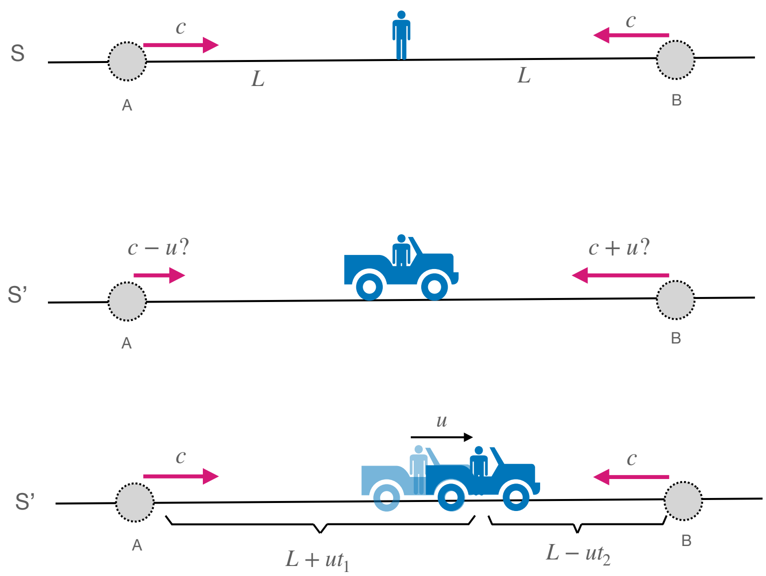
یک امر مطلق ثابت کرد. زمان مطلق تصوری است که به اشتباه در طول قرن ها شکل گرفته است. برای فهم بهتر این مسئله به سوال زیر توجه می کنیم.

چگونه یک ناظر می تواند بفهمد که در دستگاه خود او دو رویداد همزمان رخ داده اند یا نه؟ پاسخ اش با توجه به چگونگی ساخت دستگاه مختصات و ساعت ها که در بخش پیشین شرح دادیم بسیار ساده است. هر رویدادی که رخ می دهد هم زمان و هم مکان آن به دقت توسط ساعت کنار آن ثبت می شود. بنابراین با مراجعه به ساعت های محل دو رویداد می توانیم به سوال فوق پاسخ دهیم. حال سوال دیگری می پرسیم. آیا اگر دو رویداد برای ناظر S همزمان باشند، برای ناظر S' نیز که با سرعت v نسبت به آن حرکت می کند، همزمان خواهند بود؟ برای پاسخ به این سوال به شکل (۱۶) نگاه می کنیم. در این شکل دو رویداد در نقاط A و B رخ می دهند. این دو رویداد به فاصله مساوی از ناظر S قرار دارند. وقتی که علامت نوری این دو رویداد در یک لحظه (به صورت همزمان) به ناظر S می رسد، او به این نتیجه می رسد که دو رویداد A و B در یک زمان رخ داده اند. حال همین پدیده را از دید ناظر S' بررسی می کنیم که با سرعت u به طرف B در حال حرکت است. این ناظر علامت B را زودتر دریافت می کند و علامت A را دیرتر. بنابراین به این نتیجه می رسد که رویداد B زودتر از A رخ داده است. به این ترتیب می بینیم که همزمانی دو رویداد امر مطلقی نیست و به ناظر ساکن یا در حال حرکت بستگی دارد! اما در اینجا ممکن است اعتراض کنید، چرا که می بایست تفاوت سرعت ها را در نظر می گرفتیم و بعد زمان ها را حساب می کردیم. سرعت ناظر در یک جهت $c+u$ و در جهت دیگر $c-u$ است و اگر این تفاوت سرعت ها را در نظر بگیریم، مثل دیاگرام وسطی در شکل (۱۶) آنگاه خواهیم فهمید که دلیل تفاوت زمان رسیدن علامت ها همین تفاوت سرعت هاست و رویدادها واقعا برای این ناظر هم همزمان رخ داده اند! به این ترتیب ثابت کرده ایم که بر خلاف استدلال پیشین واقعا همزمانی مطلق است. یک زمان مطلق وجود دارد که همه ناظر ها در باره آن اتفاق نظر دارند. ولی اگر خوب دقت کنیم متوجه می شویم که اثبات بالا یک اشکال اساسی دارد. در واقع وقتی که سرعت علامت ها را به صورت $c+u$ و $c-u$ گرفته ایم عملا از تبدیلات گالیله و فرض اساسی همزمانی استفاده کرده ایم. بدون آن فرض نمی توانستیم چنین روابطی را برای تبدیل سرعت ها بنویسیم. در نتیجه اثبات بالا در واقع اثبات نیست چرا که نتیجه اش در همان ابتدا فرض شده است. پس دوباره بازمی گردیم به نسبیت همزمانی. اما شما می توانید بازهم اعتراض کنید: لزومی ندارد که از تبدیل سرعت ها استفاده کنیم. می توانیم مطابق دیاگرام پایینی در شکل (۱۶) استدلال کنیم که تنها نیاز به اندازه گیری فاصله ها دارد و متکی به تبدیل سرعت ها نیست. می گوییم اگر علامت A در زمان t_1 به ناظر رسیده باشد، جمع طول ها برابر است با: $L=ct_1+ut_1$ و اگر علامت B در زمان t_2 به ناظر رسیده باشد، جمع طول ها برابر است با: $L+ut_2=ct_2$. به این ترتیب بدون استفاده از تبدیل سرعت های گالیله به همان روابط $t_1=\frac{L}{c+u}$ و $t_2=\frac{L}{c-u}$ می رسیم که می توانیم با استفاده از آن ها قضاوت کنیم که دو رویداد وقعا هم زمان بوده اند!! آیا این استدلال میخ نهایی بر تابوت نسبیت همزمانی نیست و به طور دقیق ثابت نمی کند که زمان یک امر مطلق بین همه دستگاه هاست؟ پاسخ اش بازهم منفی است. در واقع این استدلال متکی بر این فرض است که در لحظه ای که دو رویداد رخ داده اند ناظر S' درست در وسط فاصله بین دو

رویداد بوده است. یعنی فرض همزمانی به صورت پنهانی مبنای این استدلال قرار گرفته است.

آنچه که از این استدلال و استدلالات شبیه به این آموخته ایم این است که همزمانی رویدادها برای ناظرهای مختلف به هیچ وجه بدیهی نیست و به هیچ وجه نمی توان آن را با قوانین فیزیکی و استدلال منطقی ثابت کرد و مفهومی مثل زمان مطلق که برای همه ناظرها یکسان باشد وجود ندارد. به عبارت دیگر همزمانی [۱۰] تنها فرضی بوده است که در گوشه ذهن ما از زمان های بسیار دور تا اوایل قرن بیستم ، به عنوان یک امر بدیهی و مسلم جا خوش کرده بدون آنکه کسی به نابدیهی بودن آن شک کند و اینشتین نخستین کسی بود که با تجزیه تحلیل هایی نظیر آنچه که در این بخش شرح دادیم ، نشان داد که این مفهوم بدیهی نیست و اصولا نمی توان به مفهومی از زمان دست یافت که برای همه ناظرهای مختلف یکسان باشد.

[۱۰] imultaneityS



شکل ۱۶: در دو نقطه ی A و B دو رویداد رخ می دهند، مثلا دو چراغ روشن می شوند. در شکل بالایی، ناظری که نسبت به دو نقطه A و B ساکن است، هر دو علامت یا نور ارسال شده از این دو رویداد را همزمان دریافت می کند و حکم می کند که دو چراغ همزمان روشن شده اند. در شکل وسطی، ناظری که حرکت میکند، در دستگاه خود تجزیه و تحلیل می کند. خود را ساکن می بیند. در دستگاه او علامت صادر شده از B زودتر به او می رسد و علامت صادر شده از A دیرتر به او می رسد. اما او این تفاوت را به اختلاف سرعت دو علامت نسبت می دهد و استدلال می کند که دو چراغ همزمان روشن شده اند. (اشکال این نوع استدلال این است که تبدیل سرعت ها خود متکی بر فرض زمان مطلق و همزمانی رویدادها است.) در پایین ترین شکل، ناظری که در حال حرکت است این پدیده را به شکل دیگری یعنی در دستگاه ساکن نسبت به چراغ ها بررسی می کند. هر دو علامت با سرعت یکسان به سوی او می آیند اما این دو علامت مسافت های متفاوتی طی می کنند. این تفاوت مسافت هاست که باعث می شود او در مورد همزمانی دو رویداد به اشتباه بیفتد. (اشکال استدلال او این است که بازهم متکی به فرض همزمانی دو رویداد است: روشن شدن یکی از چراغ ها و گذشتن او از نقطه وسط در همان لحظه.)

۱۲ دیاگرام های مینکوفسکی

اگرچه همه محاسبات مربوط به تبدیلات لورنتز را می توان به صورت جبری نشان داد، اما می توان از یک دیدگاه اموزنده دیگر نیز به این تبدیلات پرداخت. این دیدگاه توسط هرمان مینکووسکی [۱۱] ارائه شده است. دیاگرام دو بعدی $x-t$ که در واقع شکل ساده شده از دیاگرام چهاربعدی $x-y-z-t$ است، دیاگرام فضا_زمان [۱۲] است. هر رویداد در واقع یک نقطه از این دیاگرام است. بنابراین از این به بعد کلمه رویداد یا نقطه را به معنای یکسان به کار می بریم.

نخست توجه می کنیم که در تبدیلات لورنتز یک کمیت وجود دارد که ناورداست [۱۳] یعنی تحت تبدیلات لورنتز تغییر نمی کند. این کمیت عبارت زیر است:

$$I := c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2. \tag{۶۰}$$

براحتی ناوردا بودن این کمیت را تحت تبدیلات لورنتز می توان تایید کرد، یعنی این که تحت تبدیلات لورنتز داریم:

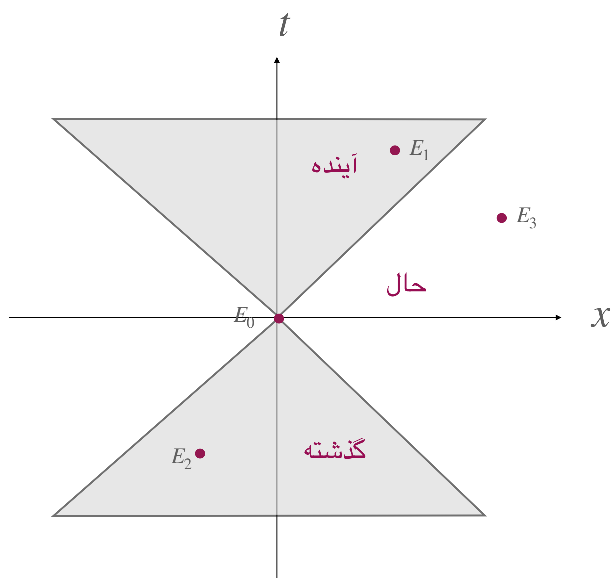
$$c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = c^2t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2. \tag{۶۱}$$

این رابطه برای نقاط نزدیک به هم به شکل زیر در می آید:

$$c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2dt'^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2. \tag{۶۲}$$

بنابراین مثل این است که یک نوع متریک یا فاصله در فضازمان [۱۴] ۴ بعدی وجود دارد که تحت تبدیلات لورنتز ثابت باقی می ماند. به همان شکلی که دوران مختصه های x, y, z را از یک نقطه تغییر می دهد ولی طول بردارها یا فاصله ها را تغییر نمی دهد، تبدیلات لورنتز نیز مختصه های فضا و زمان هر دو را تغییر می دهد اما نهایتا این فاصله خاص را که فاصله مینکوفسکی یا متریک مینکوسفکی گفته می شود تغییر نمی دهد. به این ترتیب فضا و زمان هر دو اصالت خود را به تنهایی از دست می دهند و آنچه که اصالت می یابد فضازمان است. اگر در فضا زمان نقطه ای را به عنوان مبدا اختیار کنیم مثل نقطه E_0 در شکل (۱۷) می بینیم که همه نقاط نسبت به این نقطه سه وضعیت مشخص دارند.

[۱۱] Hermann Minkowski
[۱۲] Space-Time Diagram
[۱۳] Invariant
[۱۴] Spacetime



شکل ۱۷: مخروط نور نشان می دهد که مفهوم گذشته، حال و آینده چگونه در نسبیت به شکل اساسی متحول شده است. اگر رویداد E_0 را در نظر بگیریم، تمام رویدادهای مخروط بالایی می توانند از آن تاثیر بگیرند بنابراین آینده این رویداد را تشکیل می دهند. هم چنین تمامی رویدادهای مخروط پایینی می توانند روی رویداد E_0 تاثیر بگذارند، بنابراین گذشته آن محسوب می شوند. بقیه نقاط هیچ نوع رابطه علّی با رویداد E_0 ندارند. بنابراین نسبت به آن حال محسوب می شوند.

$$I \equiv c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 \begin{cases} > 0, & \text{زمان گونه} \\ 0, & \text{نور گونه} \\ < 0, & \text{فضا گونه} \end{cases} \tag{۶۳}$$

رویدادهایی که نسبت به E_0 زمان گونه [۱۵] هستند، رویدادهایی هستند که یک علامت با سرعت کمتر از نور می تواند بین این دو رویداد مبادله شود و تاثیر یکی را روی دیگری منتقل کند. به این ترتیب این دو رویداد می توانند تاثیر علی روی یکدیگر بگذارند. در شکل (۱۷) نقاط E_1 و E_2 با E_0 رابطه زمان گونه دارند و یکی در گذشته و دیگری در آینده این نقطه قرار دارد. اما رویداد E_3 با رویداد E_0 رابطه فضاگونه [۱۶] دارد و

[۱۵] Time-like
[۱۶] Space-Like

هیچ گونه رابطه علّی بین این دو رویداد وجود ندارند. این دو رویداد هیچ کدام در گذشته یا آینده دیگری نیست، بنابراین هر دو نسبت به هم رابطه اکنون و حال را دارند. و سرانجام رویدادهایی که درست روی مخروط نور باشند، با E_0 رابطه نور_ گونه [۱۷] دارند به این معنا که فقط نور می تواند بین این دو رویداد مبادله شود. در دیاگرام های فضا زمانی، می توان مسیر یک ذره که اصطلاحاً به آن جهان خط [۱۸] گفته می شود، را رسم کرد. شکل (۱۸) یک جهان خط را نشان می دهد. در هر نقطه از جهان خط می بایست تمام نقاط نزدیکی که روی جهان خط هستند در داخل مخروط کوچکی که روی آن نقطه رسم می کنیم قرار بگیرند چرا که در غیر این صورت معنایش این است که مسیر ذره از روی یک رابطه علمی تعیین نمی شود.

۱.۱۲ زمان ویژه

سفینه ای را در نظر بگیرید که در یک مسیر مشخص در حال حرکت است. ممکن است در طول مسیر سرعت و جهت حرکت آن تغییر کند. ساعتی که درون این سفینه هست زمانی را ثبت می کند. این زمان را با τ نشان می دهیم. ساعتی که در آزمایشگاه زمینی ثابت است زمان t را نشان می دهد. زمان τ را که متصل به سفینه در حال حرکت است زمان ویژه می نامیم. اگر دو نقطه نزدیک به هم را در طول مسیر سفینه در نظر بگیریم، این دو نقطه دارای مختصات آزمایشگاهی زیر هستند:

$$(t, \mathbf{r}), \qquad (t + dt, \mathbf{r} + \mathbf{dr}). \tag{۶۴}$$

مختصات این دو نقطه روی سفینه برابر اند با:

$$(\tau, \mathbf{r}'), \qquad (\tau + d\tau, \mathbf{r}'). \tag{۶۵}$$

از این استفاده کرده ایم که ساعت در سفینه مکان ثابتی دارد. از ناوردایی طول می دانیم که

$$c^2dt^2 - d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = c^2d\tau^2 \tag{۶۶}$$

و یا

$$c^2dt^2 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}dt^2 = c^2d\tau^2. \tag{۶۷}$$

از این رابطه نتیجه می گیریم

[۱۷] Light-Like
[۱۸] World-Line

$$dt = \gamma d\tau. \tag{۶۸}$$

این رابطه چیز جدیدی نیست جز همان رابطه انبساط زمان که این با به طور لحظه ای و برای هر نقطه در طول مسیر حرکت و برای فاصله های زمانی بی نهایت کوچک نوشته شده است. این رابطه به ما یاد می دهد که گذشت زمان را چگونه در روی زمین با گذشت زمان در روی سفینه مقایسه کنید. این مقایسه به شکل زیر انجام می شود:

$$t_1 = \int_0^{\tau_1} (1 - \frac{u^2}{c^2})^{\frac{-1}{2}} d\tau = \int_0^{\tau_1} \gamma d\tau \tag{۶۹}$$

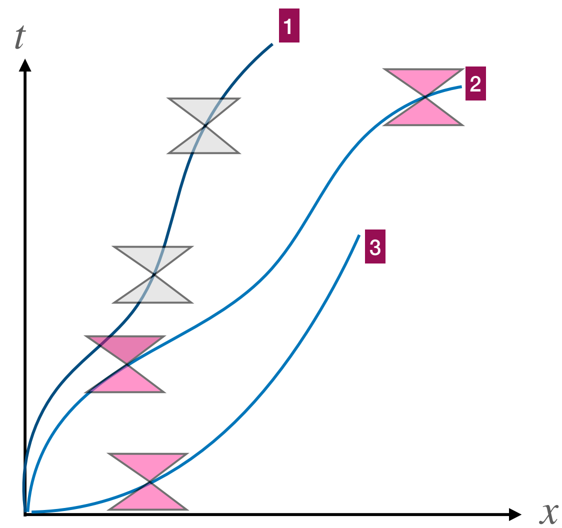
یا

$$\tau_1 = \int_0^{t_1} (1 - \frac{u^2}{c^2})^{\frac{1}{2}} dt = \int_0^{t_1} \frac{1}{\gamma} dt \tag{۷۰}$$

یک نتیجه دیگر که از این معادله بدست می آید و در آینده از آن استفاده خواهیم کرد این است:

$$\frac{d}{dt} = \frac{d}{d\tau}\frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{\gamma}\frac{d}{d\tau} \tag{۷۱}$$

لازم نیست که همواره سفینه ای در کار باشد تا از زمان ویژه صحبت کنیم. می توانیم از زمان ویژه ای که همراه یک ذره در حال حرکت است نیز صحبت کنیم. اهمیت زمان ویژه آن است که یک زمان ناورداست، چرا که بنا بر تعریف برای همه ناظرها یکسان است. این تعریف به ما اجازه می دهد که معادله حرکت نیوتن را به ساده ترین شکل ممکن به سرعت های نسبیتی تعمیم دهیم. اما قبل از آن لازم است که به یک بحث کلی در باره ناوردایی قوانین فیزیک تحت تبدیلات لورنتز بپردازیم.



شکل ۱۸: جهان خط یک ذره مسیر حرکت آن ذره را در یک دستگاه مختصات نشان می دهد. در هر نقطه از مسیر جهان خط می بایست داخل مخروط نوری قرار بگیرد چرا که در غیر این صورت به معنای آن است که سرعت ذره در آن لحظه از سرعت نور بیشتر شده است یا به عبارت دیگر به معنای این است که نقاط مختلف در مسیر ذره ارتباط علی با هم ندارند. از بین سه جهان خط بالا تنها جهان خط شماره 1 جهان خط واقعی یک ذره است. بقیه جهان خط ها از نظر فیزیکی قابل قبول نیستند.

۱۳ تبدیلات لورنتز و دیاگرام مینکوفسکی

از دید یک ناظر دیاگرام مینکوفسکی اش یک دیاگرام با خطوط موازی است که شبکه از نقاط را مشخص می کند. هر نقطه دو مختصه (t,x) دارد که زمان و مکان آن رویداد را مشخص می کند. سوال این است که دیاگرام مینکوفسکیِ ناظری که با سرعت v به سمت راست حرکت می

کند، را چگونه باید رسم کنیم تا رابطه این دو دیاگرام دقیقا نشان دهنده تبدیلات لورنتز باشد. برای این کار یک بار دیگر تبدیلات لورنتز را به یاد می آوریم:

$$x = \gamma(x' + vt')$$
$$t = \gamma(t' + vx') \qquad (۷۲)$$

می خواهیم محورهای t' و x' را رسم کنیم. محور t' در واقع چیزی نیست جز محوری که در آن $x' = 0$ است. بنابراین با قراردادن $x' = 0$ در تبدیلات لورنتز بدست می آوریم

$$x = \gamma v t', \quad t = \gamma t' \qquad (۷۳)$$

که با حذف t' بین این دو معادله خطی که نشان دهنده این محور است بدست می آید که برابر است با $x = vt$. به همین ترتیب معادله محور x' یا $t' = 0$ بدست می آید که برابر است با: $t = vx$. این دو محور در شکل (۱۹) نشان داده شده اند. به همین ترتیب می توانیم معادله محورهای موازی نظیر $x' = 1, x' = 2, \cdots x' = n$ و یا $t' = 1, t' = 2, \cdots t' = n$ را بدست آوریم. معادله های این خطوط به شکل زیرند: سرعت نور را برابر با یک گرفته ایم ($c = 1$.)

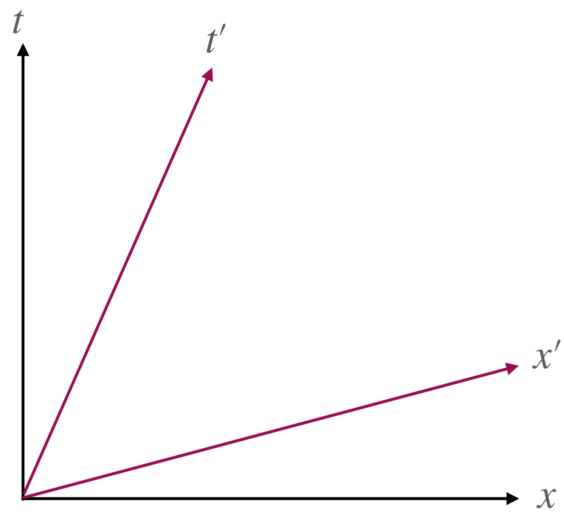
$$x' \; = \; n \; \longrightarrow \; x - vt = n\sqrt{1-v^2}$$
$$t' \; = \; n \; \longrightarrow \; t - vx = n\sqrt{1-v^2}. \qquad (۷۴)$$

به این ترتیب شکل (۲۰) بدست می آید. روی این شکل هر دو دستگاه مختصات کالیبره شده اند و هر نقطه ای (هر رویدادی) در هر کدام از دستگاه های لخت مختصات منحصر به فرد خود را دارد. برای آنکه در دستگاه S مختصات یک نقطه (یا رویداد) را به دست آوریم کافی است که خط هایی به موازات محورهای x و t رسم کنیم و روی این محورها اعداد نوشته شده را بخوانیم. همین کار را نیز می بایست برای تعیین مختصات یک رویداد برای ناظر S' انجام دهیم. نکته ای که خیلی مهم است به آن دقت کنیم این است که مقیاس اندازه ها در این دو دستگاه مختصات یکسان نیست. یعنی نمی بایست طول پاره خط ها را با هم مقایسه کنیم بلکه آنچه که مهم است همان اعداد نوشته شده است که با دقت از تبدیلات لورنتز بدست آمده اند.

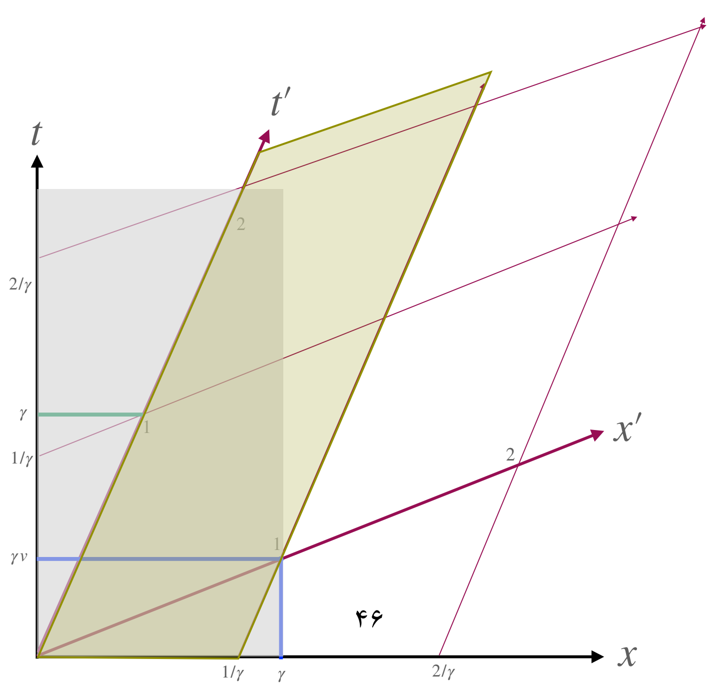
- با ارائه یک مثال مشخص از روی همین شکل نشان دهید که مقیاس طول ها در دو دستگاه مختصات یکسان نیست و اگر بدون توجه به این تفاوت مقیاس ها روابط مثلثاتی را به کار ببریم دچار تناقض می شویم.

با استفاده از همین دیاگرام های فضا_زمانی مینکوفسکی که با کمی تفصیل بیشتر در شکل (۲۱) نشان داده شده است، می توانیم انقباض طول و انبساط زمان را برای هر کدام از ناظر ها توضیح دهیم. نخست به انقباض طول می پردازیم. نوار خاکستری رنگ به اصطلاح جهان_نوارِ خط کشی است که در دستگاه ناظر S ساکن است و طول γ دارد. این نوار محورهای همزمان دستگاه S' را در نقاطی به طول 1 قطع می کند که نشان می دهد طول این خط کش از دید ناظر S' به اندازه ضریب $\frac{1}{\gamma}=\sqrt{1-v^2}$ کوتاه شده است. بر عکس نوار خردلی رنگی جهان_نوارِ خط کشی را نشان می دهد که در دستگاه S' ساکن است و طول آن برابر با 1 است. این نوار محورهای همزمان را در دستگاه ناظر S در طول های $\frac{1}{\gamma}$ قطع می کند که نشان می دهد از نظر ناظر S طول این خط کش با همان مقیاس $\sqrt{1-v^2}$ کوتاه شده است.

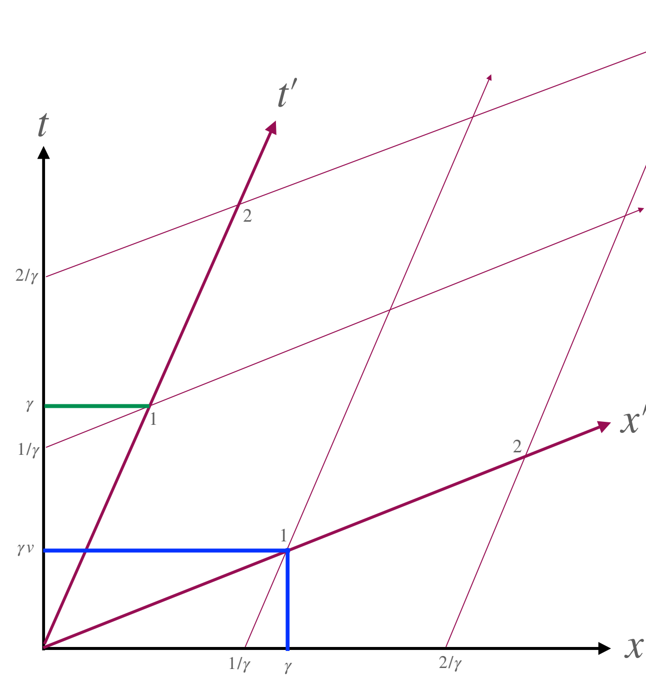
حال به انبساط زمان می پردازیم. محور t' جهان خط ساعتی است که در دستگاه S' ساکن است و تیک تاک های متوالی آن در همین دستگاه روی آن محور ثبت شده است. (دایره های کوچک قرمز رنگ.) این تیک تاک ها با اعداد $1,2,\cdots$ مشخص شده اند. حال همین تیک تاک ها از دید ناظر S در زمان های $\gamma,2\gamma,\cdots$ ثبت شده اند که نشان می دهد تیک تاک این ساعت از دید ناظر S کند شده است. بر عکس نقاط آبی رنگ تیک تاک های متوالی یک ساعت ساکن را در دستگاه S در لحظاتِ $\frac{1}{\gamma},\frac{2}{\gamma},\cdots$ نشان می دهد. همین تیک تاک ها در دستگاه ناظر S' در لحظات $1,2,\cdots$ ثبت شده اند که نشان می دهد تیک تاک ساعتِ S هم از نظر S' با همان ضریب γ کند شده است. محور x' نیز چیزی نیست جز محوری که در آن $t'=0$ است.



شکل ۱۹: در فضازمان تبدیلات لورنتز باعث چرخش دیاگرام مینکوفسکی نمی شود بلکه هر دو محور فضا و زمان به سمت داخل فشرده می شوند. این برای وقتی است که سرعت دستگاه S' نسبت به دستگاه S مثبت است. وقتی که این سرعت منفی است، محورهای مختصات S' نسبت به محورهای S رو به بیرون باز می شود.



شکل ۲۱: با مطالعه دقیق دیاگرام های مینکوفسکی می توان انقباض طول و انبساط زمان (کند شدن ساعت ها) را فهمید. این موضوع در متن درس توضیح داده شده است.



شکل ۲۰: مقیاس های طول و زمان در دو دیاگرام مینکوفسکی مربوط به ناظرهای S و S' یکی نیستند. مقیاس های روی شکل با تبدیلات لورنتز بدست آمده اند.

۱.۱۳ یک پارامتربندی جدید از تبدیلات لورنتز

با قراردادن $c = 1$ تبدیلات لورنتر به صورت ساده زیر در آمد:

$$\begin{aligned} x &= \gamma(x' + vt') \\ t &= \gamma(t' + vx'). \end{aligned} \tag{۷۵}$$

حال می توانیم با تعریف سرعت بر حسب یک پارامتر جدید، این تبدیلات را بازهم به شکل متقارن تر و زیباتری در آوریم. برای این کار قرار می دهیم

$$v = \tanh\theta. \tag{۷۶}$$

از آنجا که در دستگاه واحدهایی که $c = 1$ است، محدوده سرعت برابر است با $-1 < v < 1$ محدوده پارامتر جدید نیز برابر خواهد بود با

$$-\infty < \theta < \infty.$$

با کمی محاسبه ساده می بینیم که تبدیلات لورنتز بر حسب این پارامتر به صورت ساده و متقارن زیر در می آیند:

$$\begin{aligned} x &= x'\cosh\theta + t'\sinh\theta \\ t &= x'\sinh\theta + t'\cosh\theta. \end{aligned} \tag{۷۷}$$

به این ترتیب تبدیل لورنتز تبدیل به چیزی می شود که خیلی شبیه به یک دوران است اگرچه از بخش های گذشته و هم چنین شکلهایی که برای دیاگرام های مینکوفسکی کشیدیم می دانیم که واقعا آنچه که رخ می دهد یک دوران نیست. به عبارت دیگر تبدیل لورنتز با یک ماتریس به شکل زیر انجام می شود:

$$\begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\theta & \sinh\theta \\ \sinh\theta & \cosh\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix}, \tag{۷۸}$$

یا به صورت فشرده تحت تبدیل لورنتز

$$\mathbf{x} = \Lambda(\theta)\mathbf{x}', \tag{۷۹}$$

که در آن

$$\Lambda(\theta) = \begin{pmatrix} \cosh\theta & \sinh\theta \\ \sinh\theta & \cosh\theta \end{pmatrix}.$$

■ تمرین: نشان دهید که

$$\Lambda(\theta)\Lambda(\theta') = \Lambda(\theta+\theta').$$

نتیجه خود را تعبیر کنید.

چهارتایی (t, x, y, z) را یک چهاربردار [۱۹] می نامند. در واقع این ویژگی نشان می دهد که در فضا_زمان، هر رویداد با یک بردار چهارمولفه ای مشخص می شود و تنها این بردار به عنوان مشخصه ی آن رویداد اصالت دارد ولی مولفه هایش می توانند برای ناظرهای مختلف متفاوت باشند. تحت تبدیلات لورنتز طول لورنتزی این چهاربردارها که به صورت $t^2 - x^2 - y^2 - z^2$ تعریف می شود حفظ می شود. از این نظر تبدیلات لورنتز مثل یک دوران هستند ولی در فضایی با بعد چهار به جای سه و با متریکی متفاوت. معنای فیزیکی ناوردایی نیز چیزی نیست جز همان یکسان بودن سرعت نور در دستگاه های مختلف. برای فهمیدن این رابطه ناوردایی را به صورت زیر می نویسیم:

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - c'^2t^2. \tag{۸۰}$$

[۱۹] 4-vector

حال اگر در یک دستگاه داشته باشیم $x^2+y^2+z^2-c^2t^2=0$ ناوردایی نتیجه می دهد که این رابطه در همه دستگاه ها صحیح است. اما این رابطه چیست؟ این رابطه نشان دهنده سطح یک کره سه بعدی است که شعاع آن برابر است با ct ، یعنی سطح کره ای است که شعاع آن با سرعت نور بزرگ می شود. به عبارت دیگر این کره نشان دهنده یک جبهه موج نور است که با سرعت c در حال گسترش است. ناوردایی طول نسبیتی چهاربردارها در واقع بیان می کند که این جبهه موج در همه دستگاه ها و در همه جهات با سرعت نور منتشر می شود که همان اصل بنیادی نسبیت است.

۱۴ اثر دوپلر

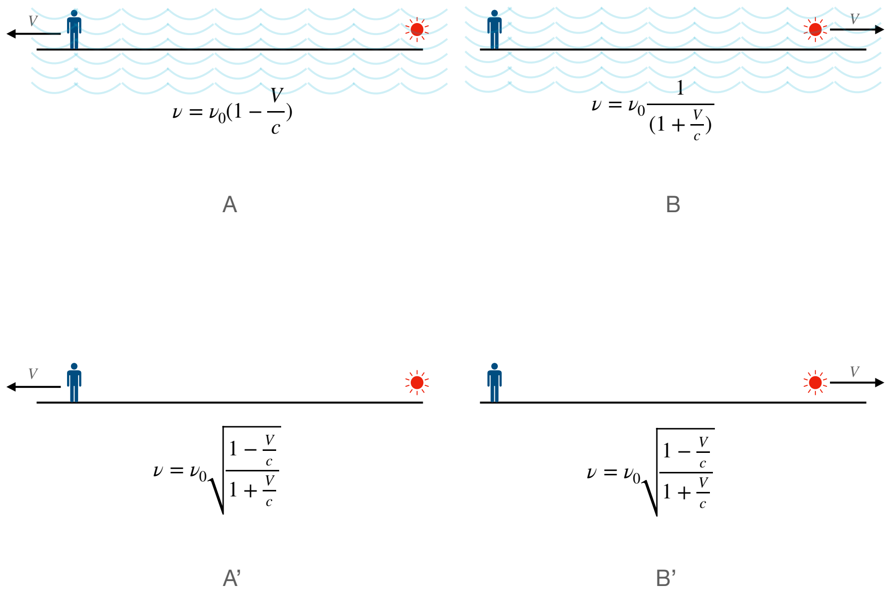
استفاده از اثر دوپلر یکی از مهمترین تکنیک های ستاره شناسان و کیهان شناسان برای کسب اطلاعات در باره سرعت ستارگان و کهکشان ها و هم چنین میزان دمای گازهای اتمسفر ستاره هاست. هم چنین این اثر نخستین راهنمای ما به انبساط کیهان بوده است. در این بخش نخست اثر دوپلر را بدون در نظر گرفتن نسبیت و یکبار هم با در نظر گرفتن نسبیت مطالعه می کنیم . مقایسه نتایج درس مهمی در باره اصل نسبیت به ما می آموزد. در این بخش ما فقط در باره اثر دوپلر برای نور مطالعه می کنیم و نه مثلا صوت یا موج دیگری.

۱.۱۴ اثر دوپلر غیر نسبیتی

یک چشمه نوری در نظر بگیرید که علائمی را در فاصله های زمانی T_0 از خود صادر می کند و نسبت به ما با سرعت v نیز حرکت می کند. سوال این است که این علائم را ما با چه فاصله زمانی ای دریافت می کنیم؟ علائمی که از آن نام می بریم نیز می توانند به عنوان مثال دامنه موج نور باشد وقتی که به ماکزیمیم خود رسیده است. برای پاسخ به این سوال یک محاسبه خیلی ساده لازم است. اما باید بین دو حالت فرق قایل شویم:

۱.۱.۱۴ وقتی که چشمه نور ساکن است و ناظر حرکت می کند.

در لحظه صفر اولین علامت صادر می شود. در این لحظه فاصله چشمه و ناظر برابر با L است. شکل (۲۲).



شکل ۲۲: اثر دوپلر: شکل های A و B اثر دوپلر غیر نسبیتی هستند. اتر در زمینه شکل ها نشان داده شده است. شکل های A' و B' اثر دوپلری نسبیتی هستند. همانطور که انتظار داریم در نسبیت نمی بایست فرقی بین این دو حالت وجود داشته باشد و نمی بایست تشخیص بدهیم که آیا ناظر حرکت می کند و چشمه نور ساکن است یا بالعکس.

این علامت با سرعت c در محیطی که می توانیم آن را اتر بنامیم منتشر شده و در زمان

$$t_1 = \frac{L}{c-V} \tag{۸۱}$$

به ناظر می رسد. دلیل اش این است که در این فاصله ناظر به اندازه Vt_1 حرکت کرده و نور مسافت $L+Vt_1$ را طی کرده است. بنابراین باید قرار دهیم

$$L + Vt_1 = ct_1$$

که از آن زمان t_1 بدست می آید. یک راه دیگر بدست آوردن این زمان هم این است که به این نکته توجه کنیم که سرعت نور نسبت به ناظر برابر با $c-V$ است. (دقت کنید که در این جا تحلیل ما غیر نسبیتی و مطابق با تبدیلات گالیله است). دومین علامت در زمان T_0 ارسال می شود و با

همان استدلال پیشین در زمان

$$t_2 = T_0 + \frac{L + VT_0}{c - v} \quad (۸۲)$$

به ناظر می رسد. دقت کنید که فاصله ای که نور می بایست بپیماید حالا برابر است با $L + VT_0$. در نتیجه فاصله زمانی بین دریافت علامت ها برای ناظر برابر است با:

$$T = t_2 - t_1 = T_0 \frac{c}{c - V} \quad (۸۳)$$

و در نتیجه رابطه بین فرکانس چشمه و ناظر به صورت زیر است:

$$\nu = \nu_0 (1 - \frac{V}{c}). \quad (۸۴)$$

۲.۱.۱۴ وقتی که ناظر ساکن است و چشمه نور حرکت می کند.

در این وضعیت نخستین علامت در زمان صفر ارسال شده و در زمان $t_1 = \frac{L}{c}$ به ناظر می رسد. دومین علامت در زمان T_0 ارسال می شود و در زمان $t_2 = T_0 + \frac{L+VT_0}{c}$ به ناظر می رسد. دقت کنید که سرعت نور در اتر (که در زمینه شکل نشان داده شده است مقدار ثابت c است.). در نتیجه فاصله زمانی دریافت علامت ها برای ناظر ساکن برابر است با:

$$T = t_2 - t_1 = T_0 (1 + \frac{V}{c}) \quad (۸۵)$$

و در نتیجه فرکانس نور دریافت شده برابر است با:

$$\nu = \nu_0 \frac{1}{1 + \frac{V}{c}}. \quad (۸۶)$$

۲.۱۴ اثر دوپلرنسبیتی

در بخش پیشین دیدیم که اندازه فرکانس های دریافت شده در حد سرعتهای کم یعنی وقتی که $\frac{V}{c}$ خیلی کوچک تر از یک است با تقریب بسیار خوب با هم برابرند. اختلاف آنها تنها در سرعت های بالا پدیدار می شود ولی در آن سرعت ها می بایست نسبیت را در نظر بگیریم و وقتی این کار را می کنیم دیگر اثری در کار نیست و فرکانس دریافتی در هر دو حالت دقیقا یکی می شود. این نتیجه از قبل هم مورد انتظار است چرا که اگر چنین باشد معنایش این است که با اندازه گیری فرکانس نور دریافتی می توانیم تشخیص دهیم که آیا ما به عنوان ناظر در حال حرکت هستیم و

چشمه نور ساکن است یا اینکه چشمه نور در حال حرکت است و ما ساکن هستیم. چنین چیزی به معنای وجود یک دستگاه مرجع مطلق است که دیده ایم وجود ندارد.

۱.۲.۱۴ وقتی که چشمه نور ساکن است و ناظر حرکت می کند.

نخست همه زمان ها را از دید چشمه نور که آن را ساکن در نظر گرفته ایم نگاه می کنیم. این زمان ها را با علامت پرایم مشخص می کنیم. در این وضعیت نخستین علامت در زمان صفر ارسال شده و در زمان $t'_1 = \frac{L}{c-V}$ به ناظر می رسد. دومین علامت در زمان T'_0 ارسال می شود و در زمان $t'_2 = T'_0 + \frac{L+VT'_0}{c-V}$ به ناظر می رسد. در نتیجه فاصله زمانی دریافت علامت ها برای ناظر برابر است با:

$$T' = t'_2 - t'_1 = T'_0 \frac{1}{1-\frac{V}{c}} \qquad (۸۷)$$

دقت کنید که در اینجا $\nu_0 = \frac{1}{T'_0}$ فرکانس چشمه نور در حال سکون آن است. هم چنین T' زمان بین دریافت دو علامت بر حسب ساعتی است که روی چشمه نور ساکن است. اما ناظر این فاصله زمانی را به اندازه $\frac{1}{\gamma}$ کوتاه تر می بیند. بنابراین خواهیم داشت:

$$T = \frac{1}{\gamma}T' = \sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}T'_0\frac{1}{1-\frac{V}{c}} = T'_0\sqrt{\frac{1+\frac{V}{c}}{1-\frac{V}{c}}} \qquad (۸۸)$$

و در نتیجه

$$\nu = \nu_0\sqrt{\frac{1-\frac{V}{c}}{1+\frac{V}{c}}}. \qquad (۸۹)$$

■ **تمرین:** پدیده دوپلر نسبیتی را وقتی که چشمه ساکن است و ناظر حرکت می کند، با استفاده از دیاگرام مینکوفسکی تجزیه و تحلیل کنید و نسبت فرکانس ها را بدست آورید. راهنمایی: جهان خط چشمه و جهان خط ناظر را در یک دیاگرام رسم کنید. سپس جهان خط دو شعاع نوری ساطع شده از چشمه را رسم کنید و تعیین کنید که این دو شعاع نوری در چه زمان هایی جهان خط ناظر را قطع می کنند. در نهایت زمان ها را بر حسب دستگاه ناظر محاسبه کنید.

۲.۲.۱۴ وقتی که ناظر ساکن است و چشمه نور حرکت می کند.

باز هم از ابتدا شروع به استدلال می کنیم. در لحظه صفر اولین علامت صادر می شود. در این لحظه فاصله چشمه و ناظر برابر با L است. این علامت با سرعت c منتشر شده و در زمان

$$t_1 = \frac{L}{c-V} \qquad (۹۰)$$

به ناظر می رسد. این زمانی است که ناظر اندازه می گیرد. (مهم است که بین زمان از دید ناظر و منبع فرق بگذاریم.) دلیل اش این است که در این فاصله ناظر به اندازه Vt_1 حرکت کرده و نور مسافت $L + Vt_1$ را طی کرده است. بنابراین باید قرار دهیم

$$L + Vt_1 = ct_1$$

که از آن زمان t_1 بدست می آید. دقت کنید که سرعت نور نسبت به ناظر را همواره برابر با c می گیریم. دومین علامت در زمان T_0 ارسال می شود و با همان استدلال پیشین در زمان

$$t_2 = T_0 + \frac{L + VT_0}{c - v} \qquad (۹۱)$$

به ناظر می رسد. دقت کنید که فاصله ای که نور می بایست بپیماید حالا برابر است با $L + VT_0$. در نتیجه فاصله زمانی بین دریافت علامت ها برای ناظر برابر است با:

$$T = t_2 - t_1 = T_0 \frac{c}{c - V} \qquad (۹۲)$$

اما یک نکته مهم در این جا وجود دارد و آن اینکه T_0 فاصله زمانی بین ارسال دو علامت در دستگاه ناظر است. این فاصله زمانی با فاصله زمانی در دستگاه چشمه فرق دارد. در واقع این رابطه چنین است:

$$T_0 = \gamma T'_0 \qquad (۹۳)$$

که در آن $T'_0 = \frac{1}{\nu_0}$ فاصله زمانی بین دو علامت در دستگاه منبع یا چشمه نور و معکوس فرکانس آن است. در نتیجه بدست می آوریم:

$$T = \gamma T'_0 \frac{1}{1 - \frac{V}{c}} = T'_0 \sqrt{\frac{1 + \frac{V}{c}}{1 - \frac{V}{c}}}. \qquad (۹۴)$$

و در نتیجه رابطه بین فرکانس چشمه و ناظر به صورت زیر است:

$$\nu = \nu_0 \sqrt{\frac{1 - \frac{V}{c}}{1 + \frac{V}{c}}}. \qquad (۹۵)$$

که با همان نتیجه قبلی یکسان است، چنانکه باید باشد.

■ **تمرین:** پدیده دوپلر نسبیتی را وقتی که ناظر ساکن است و چشمه حرکت می کند، با استفاده از دیاگرام مینکوفسکی تجزیه و تحلیل کنید و نسبت فرکانس ها را بدست آورید.

۱۵ تبدیلات لورنتز به صورت کلی

تا کنون برای سادگی فرض کرده ایم که دستگاه S' همواره در جهت محور x از دستگاه S حرکت می کند. البته اگر هم این حرکت در راستای دیگری باشد می توان دستگاه مختصات را چنان چرخاند که سرعت دستگاه S' در جهت محور x قرار بگیرد. اما ممکن است جهت حرکت دستگاه دائما تغییر کند، مثلا دستگاه S' می تواند ماهواره ای باشد که دور زمین می چرخد. در این صورت بهتر است که تبدیلات لورنتز را به صورت کاملا کلی تعریف کنیم و خواص آن را بررسی کنیم. این کار را می توان به شیوه های متفاوت انجام داد. یک راه ساده این است که همان تبدیلات لورنتز ساده را در نظر بگیریم و آنها را به شکل برداری بنویسیم. در این صورت تبدیلاتی که بدست می آیند، همواره و برای هر جهتی از سرعت ها برقرارند و نیز ربطی به این ندارند که ما چگونه مختصات دستگاه ها را انتخاب می کنیم. این کار را می توانیم به سادگی انجام دهیم. تبدیلات لورنتز را وقتی که سرعت در راستای x است در نظر می گیریم:

$$\begin{aligned} t &= \gamma(t' + vx') \\ x &= \gamma(x' + vt') \\ y &= y' \\ z &= z' \end{aligned} \qquad (۹۶)$$

و آنها را به شکل زیر بازنویسی می کنیم:

$$\begin{aligned} t &= \gamma(t' + \mathbf{v}\cdot\mathbf{r}') \\ \mathbf{r}_{||} &= \gamma(\mathbf{r}'_{||} + \mathbf{v}t') \\ \mathbf{r}_{\perp} &= \mathbf{r}'_{\perp}. \end{aligned} \qquad (۹۷)$$

در این تبدیلات $\mathbf{r}_{||}$ قسمتی از بردار مکان است که با بردار سرعت موازی است و $\mathbf{r}_{\perp}$ آن قسمتی از بردار مکان است که بر بردار سرعت عمود است. به عبارت دیگر:

$$\mathbf{r}_{||} = (\mathbf{r}\cdot\hat{\mathbf{v}})\hat{\mathbf{v}} \qquad , \qquad \mathbf{r}_{\perp} = \mathbf{r} - (\mathbf{r}\cdot\hat{\mathbf{v}})\hat{\mathbf{v}}. \qquad (۹۸)$$

■ **تمرین:** با استفاده از روابط بالا نشان دهید که

$$c^2t^2 - \mathbf{r}\cdot\mathbf{r} = c^2t^2 - \mathbf{r}\cdot\mathbf{r},$$

یعنی تحت تبدیل کلی لورنتز طول چهاربردارها تغییر نمی کند.

از روابط (۹۷) می توانیم، تبدیل سرعت ها را نیز به دست آوریم: برای این کار می نویسیم:

$$\begin{aligned} dt &= \gamma(dt' + \mathbf{v}\cdot d\mathbf{r}') \\ d\mathbf{r}_{||} &= \gamma(d\mathbf{r'}_{||} + \mathbf{v}dt') \\ d\mathbf{r}_{\perp} &= d\mathbf{r'}_{\perp}, \end{aligned} \tag{۹۹}$$

و از آنجا

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{||} &= \frac{\mathbf{u'}_{||}+\mathbf{v}}{1+\mathbf{u}'\cdot\mathbf{v}} \\ \mathbf{u}_{\perp} &= \frac{1}{\gamma}\frac{\mathbf{u'}_{\perp}}{1+\mathbf{u}'\cdot\mathbf{v}}. \end{aligned} \tag{۱۰۰}$$

■ **تمرین** الف: نشان دهید که رابطه بین اندازه سرعت ها در دو دستگاه مختصات به شکل زیر است:

$$u^2 = \frac{u'^2(1-v^2) + v^2 + 2u'_{||}v + v^2 {u'_{||}}^2}{(1+\mathbf{u}'\cdot\mathbf{v})^2}. \tag{۱۰۱}$$

ب: از این رابطه نتیجه بگیرید که سرعت نور در همه دستگاه های مختصات یکسان است.

پ: این رابطه با شرط $c=1$ نوشته شده است. آن را بدون این شرط بازنویسی کنید.

ت: نشان دهید که رابطه زیر همواره برقرار است:

$$\gamma_u = \gamma\gamma_{u'}(1+\mathbf{u}'\cdot\mathbf{v}). \tag{۱۰۲}$$

فرض کنید که دستگاه S' با سرعت v در جهت $\mathbf{n}$ نسبت به دستگاه S حرکت می کند. هم چنین فرض کنید که جهت محورهای مختصات در هر دو دستگاه S و S' یکسان است. رابطه صریح بین مختصات فضا و زمان را می توان از تبدیلات (۹۷) بدست آورد. اما یک روش دیگر هم هست که ممکن است در مواردی راحت تر باشد. تبدیل لورنتزی که چهاربردار $\mathbf{x}$ را به چهاربردار $\mathbf{x}'$ ربط می دهد را با Λ نشان می دهیم و می نویسیم:

$$\mathbf{x} = \Lambda\mathbf{x}'. \tag{۱۰۳}$$

حال می دانیم که دورانی مثل R وجود دارد که اگر توسط آن دستگاه های مختصات فضای S و S' دوران دهیم، بردار سرعت $\mathbf{v}=v\mathbf{n}$ بر محور x منطبق می شود. اگر مختصات را در این دستگاه های دوران یافته با $\mathbf{X}$ و $\mathbf{X}'$ نشان دهیم، خواهیم داشت:

$$\mathbf{X} = R\mathbf{x} \qquad , \qquad \mathbf{X}' = R\mathbf{x}'. \tag{۱۰۴}$$

برای این دستگاه های جدید که در راستای محور x نسبت به هم حرکت می کنند، تبدیلات لورنتز همان شکل ساده و آشنای خود را دارند، یعنی

$$\mathbf{X} = \Lambda_0 \mathbf{X}' \tag{۱۰۵}$$

که در آن Λ_0 همان تبدیلات ساده لورنتز است وقتی که سرعت دستگاه ها نسبت به هم در راستای محور x است. بنابراین می توان با ترکیب روابط قبلی نوشت:

$$\mathbf{x} = R^{-1}\mathbf{X} = R^{-1}\Lambda_0 \mathbf{X}' = R^{-1}\Lambda_0 R\mathbf{x}'. \tag{۱۰۶}$$

به این ترتیب تبدیل لورنتز نهایی را به دست می آوریم:

$$\Lambda = R^{-1}\Lambda_0 R. \tag{۱۰۷}$$

■ **مثال:** دستگاه S' با سرعت v در راستای محور $(\cos\theta, \sin\theta, 0)$ نسبت به دستگاه S حرکت می کند. جهت محورها در هر دو دستگاه یکسان است. تبدیل لورنتز را برای زمان و مولفه های مکان را بین دو دستگاه بدست آورید.

■ **حل:** از این استفاده می کنیم:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{۱۰۸}$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$\Lambda = R^{-1}\Lambda_0 R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & \gamma v & 0 & 0 \\ \gamma v & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{۱۰۹}$$

و یا پس از ضرب کردن و ساده کردن

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma v\cos\theta & \gamma v\sin\theta & 0 \\ \gamma v\cos\theta & \gamma\cos^2\theta+\sin^2\theta & (\gamma-1)\cos\theta\sin\theta & 0 \\ \gamma v\sin\theta & (\gamma-1)\cos\theta\sin\theta & \cos^2\theta+\gamma\sin^2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (۱۱۰)$$

در نتیجه تبدیلات نهایی بین مولفه ها برابر خواهد بود با:

$$\begin{aligned} t &= \gamma(t'+v\cos\theta x'+v\sin\theta y') \\ x &= \gamma v\cos\theta t'+(\gamma\cos^2\theta+\sin^2\theta)x'+(\gamma-1)\cos\theta\sin\theta y' \\ y &= \gamma v\sin\theta t'+(\gamma-1)\cos\theta\sin\theta x'+(\cos^2\theta+\gamma\sin^2\theta)y' \\ z &= z'. \end{aligned} \qquad (۱۱۱)$$

■ **تمرین:** در تمرین قبلی تبدیل مولفه های سرعت را به دست آورید.

۱۶ گروه لورنتز

در این بخش به مطالعه تبدیلات لورنتز به عنوان یک گروه می پردازیم. این مطالعه به ما نشان خواهد داد که تبدیلات لورنتز از زیبایی خارق العاده ریاضیاتی نیز برخوردارند. نخست مفهوم چهاربردار را به یاد می آوریم و نماد جدیدی برای آن به کار می بریم. از این به بعد چهار بردار را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\mathbf{x} = (t,\ x,\ y,\ z) = (x^0,\ x^1,\ x^2,\ x^3), \qquad (۱۱۲)$$

و فاصله مینکوفسکی را بین دو نقطه نزدیک به هم با مختصات x^μ و $x^\mu + dx^\mu$ نیز به صورت زیر می نویسیم:

$$ds^2 = \eta_{\mu,\nu} dx^\mu dx^\nu \qquad (۱۱۳)$$

که در آن η متریک مینکوفسکی خوانده می شود

$$\eta \equiv \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}. \tag{۱۱۴}$$

مولفه های این متریک را با $\eta_{\mu\nu}$ نشان می دهیم. معکوس ماتریس η با خود آن برابر است ولی برای تشخیص این دو از هم درایه های معکوس را با $\eta_{\mu\nu}$ نشان می دهیم. بنابراین داریم:

$$\eta_{\mu\nu}\eta^{\nu\alpha} = \delta^{\alpha}_{\mu}. \tag{۱۱۵}$$

با متریک مینکوفسکی می توان اندیس های هر چهاربرداری را بالا یا پا یین برد. به این ترتیب می توانیم بنویسیم:

$$x_\mu = \eta_{\mu\nu}x^\nu, \qquad x^\mu = \eta^{\mu,\nu}x_\nu. \tag{۱۱۶}$$

■ یک نکته در باره نمادگذاری:

الف: در همه روابط قرارداد جمع اینشتین را به کار می بریم به این معنا که تکرار یک اندیس بالا و پایین به معنای جمع روی مقادیر این اندیس هاست.

ب: بسیاری اوقات در نمادگذاری خود یک نوع اهمال را مجاز می شماریم مثلا می نویسیم

$$x^\mu = (x^0,\ x^1,\ x^2,\ x^3)$$

یا

$$x_\mu = (x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3) = (x^0,\ -x^1,\ -x^3,\ -x^3)$$

یعنی نماد مولفه ها را برای نشان دادن کلیت یک چهاربردار یا یک تانسور به کار می بریم.

به این ترتیب می توانیم بنویسیم:

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = \eta^{\mu,\nu}dx_\mu dx_\nu = dx_\mu dx^\mu. \tag{۱۱۷}$$

حال تبدیل لورنتز را تبدیلی تعریف می کنیم که متریک مینکوفسکی را حفظ کند. به همان معنایی که دوران تبدیلی است که متریک معمولی اقلیدسی را حفظ کند. به این ترتیب اگر λ^μ_ν یک تبدیل لورنتز باشد که چهاربردارها را به صورت زیر تغییر می دهد:

$$x^\mu \longrightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu, \tag{۱۱۸}$$

می بایست داشته باشیم:

$$\eta_{\mu,\nu} x'^\mu x'^\nu = \eta_{\alpha,\beta} x^\alpha x^\beta \tag{۱۱۹}$$

و یا

$$\eta_{\mu,\nu} \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta = \eta_{\alpha,\beta}. \tag{۱۲۰}$$

اگر از نمادهای ماتریسی استفاده کنیم این رابطه را می توانیم به صورت فشرده زیر بنویسیم:

$$\Lambda^t \eta \Lambda = \eta. \tag{۱۲۱}$$

مجموعه تمامی ماتریس هایی که در چنین رابطه ای صدق می کنند، یک گروه تشکیل می دهند که آن را گروه $O(1,3)$ می نامیم. (اگرمتریک اقلیدسی بود، چنین تبدیلاتی دوران نامیده می شدند و این گروه را با نماد $O(4)$ [۲۰] نشان می دادیم.) گر ازطرفین این رابطه دترمینان بگیریم متوجه می شویم که $\det\Lambda = \pm 1$. بنابراین گروه لورنتز به دوناحیه مجزا تقسیم می شود که با تغییر پیوسته پارامترها نمی توان از یک ناحیه به ناحیه دیگر رفت. حال به یک قید دیگر توجه می کنیم. اگر عنصر 00 را برای هردوطرف رابطه (121) حساب کنیم بدست می آوریم:

$$\sum_{\mu=0,\nu=0}^{3} \Lambda_{\mu 0} \eta^{\mu\nu} \Lambda_{\nu 0} = 1 \tag{۱۲۲}$$

حال بااستفاده از قطری بودن η و فرم صریح آن در (??) طرف چپ تبدیل می شود به

$$\Lambda_{00}^2 = 1 + {\Lambda_{10}}^2 + {\Lambda_{20}}^2 + {\Lambda_{30}}^2. \tag{۱۲۳}$$

این رابطه نشان می دهد که یا $\Lambda_{00} \geq 1$ و یا $\Lambda_{00} \leq -1$. بنابراین هرکدام از دو ناحیه قبلی به نوبه خود به دو دو ناحیه‌مجزا تقسیم می شوند. درنتیجه گروه لورنتز از چهارناحیه مجزا تشکیل می شود ، که می توان آنها را به شکل زیر نام گذاری کرد:

$$O(1,3)^+_\uparrow \quad = \quad \{\Lambda \in O(1,3) | \det\Lambda = 1, \quad \Lambda_{00} \geq 1\}$$

[۲۰] Four Dimensional Orthogonal Group

$$
\begin{aligned}
O(1,3)^{+}_{\downarrow} &= \{\Lambda \in O(1,3) |\det\Lambda = 1, \ \ \Lambda_{00} \leq -1\} \\
O(1,3)^{-}_{\uparrow} &= \{\Lambda \in O(1,3) |\det\Lambda = -1, \ \ \Lambda_{00} \geq 1\} \\
O(1,3)^{-}_{\downarrow} &= \{\Lambda \in O(1,3) |\det\Lambda = -1, \ \ \Lambda_{00} \geq -1\}.
\end{aligned}
\qquad (۱۲۴)
$$

مسلم است که از این چهارناحیه دوناحیه آخر نمی توانند زیرگروه باشند زیرا دترمینان هرعضو آنها برابربا منهای یک است و هردو عضوی ازآنها که درهم ضرب شود، دترمینان یک خواهد داشت. ناحیه دوم نیز زیرگروه نیست زیرا شامل عنصر واحد نیست. به شرط $\Lambda_{00} \leq -1$ دراین ناحیه توجه کنید. تنهاناحیه اول زیرگروه است که آن را گروه تبدیلات ویژه لورنتز می نامیم.

■ تمرین: ثابت کنید که از میان مجموعه های بالا تنها $O(1,3)^{+}_{\uparrow}$ یک زیر گروه است.

برای آنکه ساختمان گروه لورنتز را بهتربشناسیم و ازلحاظ فیزیکی نیز معنای تبدیلات این چهارناحیه را بهتر بفهمیم ماتریس های زیر را درنظرمی گیریم.

$$
T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \pi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \qquad (۱۲۵)
$$

این دو تبدیل هردو متعلق به گروه لورنتز هستند. T تبدیل وارونی زمان را ایجاد می کند و π تبدیل انعکاس فضایی حول مبداء مختصات فضا را بوجود می آورد. حال اگر $\Lambda \in O(1,3)^{+}{}_{\uparrow}$، آنگه براحتی می توان دید که

$$
T\Lambda \in O(1,3)^{-}{}_{\downarrow}, \qquad \pi\Lambda \in O(1,3)^{-}{}_{\uparrow}, \qquad (\pi T)\Lambda \in O(1,3)^{-}{}_{\downarrow}. \qquad (۱۲۶)
$$

درنتیجه قسمت های مختلف چهارگانه فوق هم‌مجموعه های عناصر π, T, I و πT هستند. هرگاه Λ یک تبدیل ویژه لورنتز باشد، آنگاه $T\Lambda$، $\pi\Lambda$ و $\pi T\Lambda$ تبدیل هایی هستند که درآن ها Λ با وارونی زمان، انعکاس فضایی حول مبداء و یا هردو دنبال شده اند. ازاین به بعد ماتوجه خود را به تبدیلات ویژه لورنتز معطوف می کنیم و غالب اوقات نیز صفت ویژه را برای آنها بکارنمی بریم. این تبدیلات تبدیلاتی هستند که به طور پیوسته به تبدیل همانی I متصل هستند. بهترین کارآن است که تبدیلات بی نهایت کوچک را مطالعه کنیم. هرتبدیلی از این نوع به شکل زیراست:

$$
\Lambda \approx I + b \qquad (۱۲۷)
$$

که درآن درایه های b کوچکند. شرط (121) درمورد این ماتریس تبدیل می شود به

$$\eta b + b^t \eta = 0. \tag{۱۲۸}$$

درنتیجه b می بایست به فرم زیرباشد:

$$b = \begin{pmatrix} 0 & \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 \\ \theta_1 & 0 & -\epsilon_3 & \epsilon_2 \\ \theta_2 & \epsilon_3 & 0 & -\epsilon_1 \\ \theta_3 & -\epsilon_2 & \epsilon_1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{۱۲۹}$$

می توان این ماتریس را به صورت زیرنوشت:

$$b = \theta_1 K_1 + \theta_2 K_2 + \theta_3 K_3 + \epsilon_1 J_1 + \epsilon_2 J_2 + \epsilon_3 J_3, \tag{۱۳۰}$$

که درآن

$$K_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad K_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad K_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{۱۳۱}$$

و

$$J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{۱۳۲}$$

بدلایلی که بزودی خواهیم دید K ها مولد های خیز [۲۱] و J ها مولد های دوران نامیده می شوند. این که J ها مولد های دوران هستند باتوجه به آنکه روی زمان هیچ کاری نمی کنند و هم چنین باتوجه به آنچه که درمورد گروه دوران دربخش های قبل دیدیم واضح است. برای K ها کافی

[۲۱] boost

است که بدون نقض کلیت تبدیل زیررا درنظربگیریم:

$$\Lambda_1 := I + \theta K_1. \tag{۱۳۳}$$

براحتی دیده می شود که Λ_1 نقطه $x = (t, x, y, z)$ از فضا زمان را تبدیل به نقطه $x' = (t', x', y', z')$ می کند که درآن:

$$\begin{aligned} t' &= t + \theta x \\ x' &= \theta t + x \\ y' &= y \\ z' &= z, \end{aligned} \tag{۱۳۴}$$

که فرم بی نهایت کوچک یک تبدیل لورنتز درراستای x با پارامتر θ و یا سرعت $v = \tanh\theta$ است. درواقع یک خیز محدود درراستای x را می توان به شکل زیربدست آورد:

$$\Lambda = \lim_{N\longrightarrow\infty} (I + \frac{\theta}{N} K_1)^N = e^{\theta K_1} \tag{۱۳۵}$$

اما ماتریس e^{K_1} را براحتی می توان محاسبه کرد. اگر به ساختار بلوکه قطری آن توجه کنیم یعنی به این که $K_1 = \sigma_x \oplus I$ و هم چنین از خواص ماتریس های پاوولی استفاده کنیم، می توانیم براحتی دریابیم که

$$e^{K_1} = \begin{pmatrix} \cosh\theta & \sinh\theta & 0 & 0 \\ \sinh\theta & \cosh\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{۱۳۶}$$

که نشان دهنده یک خیز با پارامتر θ در راستای x است. به همین شکل می توان ماتریس های مربوط به خیز در راستاهای y و z را بدست آورد. اما از آن مهم تر می توان تبدیل خیز را در راستا های دیگر نیز بدست آورد. درحالت کلی یک تبدیل خیزخالص به شکل زیراست:

$$\Lambda = e^{\theta_1 K_1 + \theta_2 K_2 + \theta_3 K_3} = e^{\theta n \cdot K}. \tag{۱۳۷}$$

این خیز بااندازه $\theta = \sqrt{\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2}$ یا سرعت $v = \tanh\theta$ ودرراستای $\mathbf{n} = \frac{1}{\theta}(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ است. هم چنین یک دوران خالص به شکل زیراست:

$$\Lambda = e^{\epsilon_1 J_1 + \epsilon_2 J_2 + \epsilon_3 J_3} = e^{\theta n \cdot J}, \qquad (۱۳۸)$$

که درآن θ زاویه دوران و n محوردوران است.

- تمرین: دستگاه لخت S' نسبت به دستگاه لخت S با سرعت v و در راستای $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ حرکت می کند. تبدیل لورنتز را بین این دو دستگاه بدست آورید.

- تمرین: دستگاه لخت S' نسبت به دستگاه لخت S با سرعت v و در راستایی که با مختصات کروی (θ, ϕ) مشخص می شود حرکت می کند. تبدیل لورنتز را بین این دو دستگاه بدست آورید.

- تمرین: فضا زمان ۱+۲ بعدی را در نظر بگیرید. دستگاه لخت S' نسبت به دستگاه لخت S با سرعت v در راستای محور x حرکت می کند. دستگاه S" نسبت به دستگاه S' با سرعت v در راستای y حرکت می کند. (محورهای مختصات هر سه دستگاه همراستا هستند.) دستگاه S" با چه تبدیل لورنتزی به دستگاه S مربوط است؟

- تمرین: فضا زمان ۱+۲ بعدی را در نظر بگیرید. محورهای $x' - y'$ دستگاه لختِ S' نسبت به محورهای $x - y$ دستگاه S به اندازه ۴۵ درجه در جهت عقربه های ساعت چرخیده اند. در عین حال این دستگاه با سرعت v در راستای محور x نسبت به دستگاه S حرکت می کند. دستگاه S' با چه تبدیل لورنتزی به دستگاه S مربوط است؟

---

۱۷ مسئله ها:

- **آزمایش مایکلسون مورلی** در یکی از بازوهای تداخل سنج مایکلسون مورلی یک لوله خالی قرار داده شده که دو انتهایش کاملا شفاف هستند و نور می تواند از آن ها عبور کند. طول این لوله ۲۰ سانتی متر است. وقتی از نور با طول موج 5900 آنگستروم استفاده می کنیم، یک طرح تداخلی از نوارهای تاریک و روشن در تداخل سنج می بینیم. اگر هوای درون این لوله را خالی کنیم و آزمایش را تکرار کنیم،

نوارهای تاریک و روشن به چه مقدار جابجا می شوند. سرعت نور در هوا برابر است با: c $(1-2.9\times 10^{-4})$.

پاسخ: به اندازه ۲۰۰ تا.

■ **آزمایش مایکلسون ـ مورلی.** در آزمایش مایکلسون ـ مورلی که در سال ۱۸۸۷ انجام شد، طول بازوها یازده متر بود و از نور سدیم با طول موج 5900 آنگستروم نیز استفاده می شد. این آزمایش می توانست جابجایی نوارها را به اندازه 0.005 پهنای یک نوار تشخیص دهد. بیشترین مقدار سرعتی که این آزمایش برای حرکت زمین در درون اتر می توانست تشخیص دهد چقدر بود؟ به عبارت بهتر ، سرعت زمین از چه حدی اگر کمتر بود، دیگر این تداخل سنج قادر به تشخیص آن نبود.

پاسخ: حدود ۵.۳ کیلومتر بر ثانیه.

■ **تبدیلات لورنتز** مختصات فضا ـ زمانی دو رویداد در دستگاه S به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} E_1 &: x_1 = x_0, \qquad t_1 = \frac{x_0}{c} \\ E_2 &: x_2 = 2x_0, \qquad t_2 = \frac{x_0}{2c}. \end{aligned} \tag{۱۳۹}$$

مختصات y و z هر دو رویداد برابر با صفر است.

الف: یک دستگاه وجود دارد که در آن این دو رویداد همزمان روی می دهند. سرعت این دستگاه را نسبت به S پیدا کنید.

ب: در این دستگاه این دو رویداد در چه زمانی رخ می دهند.

پاسخ: الف: $-\frac{1}{2}c$ ب: $\frac{x_0}{c}\sqrt{3}$

■ **تبدیلات لورنتز:** دستگاه S' نسبت به دستگاه S با سرعت $v=\frac{c}{2}$ به سمت راست حرکت می کند. دیاگرام مینکوفسکی را که این دو دستگاه را به هم ربط می دهد رسم کنید. محورهای x و t را در این دیاگرام به صورت عمود بر هم رسم کنید.

الف: هر کدام از چهار دسته منحنی های زیر را در این دیاگرام رسم کنید:

$$x=1 \qquad t=1 \qquad x'=1 \qquad t'=1, \tag{۱۴۰}$$

که در آن n یک عدد صحیح است. c را نیز برابر با یک بگیرید.

ب: مختصات هر کدام از رویدادهای زیر را روی این دیاگرام مشخص کنید:

$$x=1,\ \ t=1$$

$$x' = 1, \quad t' = 1$$
$$x' = 2, \quad t' = 0,$$
$$x = 0, \quad t = 2. \qquad (۱۴۱)$$

■ **دوران و تبدیلات لورنتز** نشان دهید که تبدیلات لورنتز را می توان به صورت یک دوران در فضایی با مختصات (x, ict) در نظر گرفت که در آن زاویه دوران یک زاویه مختلط و برابر است با: $\theta = \tan^{-1}(i\frac{v}{c})$.

■ **تبدیلات لورنتز** در یک دستگاه لخت دو رویداد در یک مکان و با فاصله زمانی۱۰ ثانیه رخ می دهند. در یک دستگاه لخت دیگر، فاصله زمانی این دو رویداد، فاصله زمانی آنها ۱۵ ثانیه است. فاصله فضایی این دو رویداد در این دستگاه دوم چقدر است؟ آیا دستگاه لختی وجود دارد که این دو رویداد در آن همزمان باشند؟ در این صورت فاصله فضایی آنها در این دستگاه چقدر است؟

پاسخ: الف: $x_1 - x_2 = 5\sqrt{5}\, m$. ب: چنین دستگاهی وجود ندارد.

■ **انبساط زمان** قطر کهکشان ما (که به صورت یک دیسک است) در حدود ۱۰۰ هزار سال نوری است. پر انرژی ترین ذراتی که می شناسیم انرژی ای در حدود 10^{19} الکترون ولت دارند. چقدر طول می کشد که پروتون ها یی با این انرژی قطر کهکشان ما را طی کنند:

الف: در دستگاه کهکشان،

ب: در دستگاه همراه با ذره.

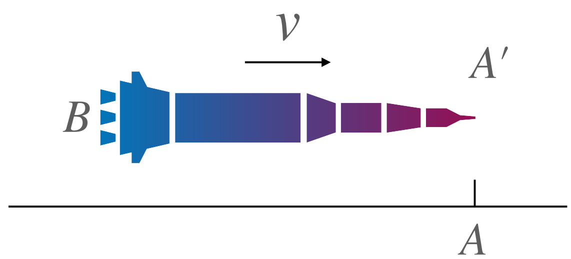
پاسخ: الف: حدود ۱۰۰ هزار سال. ب: حدود 0.3 ثانیه.

■ **تبدیلات لورنتز:** شکل (۲۳) یک سفینه را به طولِ در حال سکونِ L نشان می دهد که در راستای x و با سرعت v نسبت به یک دستگاه لخت S حرکت می کند. موقعی که دماغه سفینه یعنی نقطه A' به نقطه A می رسد، زمان $t = t' = 0$ است. در این لحظه یک علامت نوری از دماغه کشتی به انتهای آن یعنی نقطه B' ارسال می شود.

الف: بر حسب زمان سفینه، این علامت نوری چه موقع به نقطه B' می رسد.

ب: بر حسب زمان ایستگاه S این علامت چه موقع به انتهای سفینه می رسد؟

پ: در چه زمانی بر حسب ایستگاه S انتهای سفینه به نقطه A می رسد؟



شکل ۲۳: شکل مربوط به سفینه.

پاسخ: $a: \frac{L}{c} \qquad b: \frac{L}{c}\sqrt{\frac{c-v}{c+v}} \qquad c: \frac{L}{\gamma v}.$

- **جمع سرعت ها:** یک ذره مزون K° که ساکن است به دو ذره مزون π^+ و π^- واپاشیده می شود. سرعت هر کدام از این دو مزون $0.85\ c$ است. اگر یک مزون K° با سرعت $0.9\ c$ به دو مزون $\pi^\pm$ واپاشیده شود، بیشترین و کمترین سرعت این مزون ها چقدر خواهد بود.

پاسخ: $0.991\ c,\ 0.221\ c.$

- **جمع سرعت ها:** با استفاده از قاعده جمع سرعت ها در سه بعد نشان دهید که در حالت کلی نیز اگر سرعت یک ذره در یک دستگاه لخت برابر با c باشد، در دستگاه لخت دیگری نیز که نسبت به دستگاه اول حرکت می کند، سرعت این ذره برابر با c است.

- **جمع سرعت ها:** در دستگاه مختصات آزمایشگاه، باریکه ای از اتم ها که هر کدام شعاع R_1 و سرعت u دارند، به یک گاز از اتم های ساکن که هر کدام شعاع R_2 دارند برخورد می کند. چگالی گاز را n اتم در سانتی متر مکعب بگیرید و اتم ها را مثل گوی های سخت در نظر بگیرید.

الف: حساب کنید که در زمان t چه کسری از اتم های این باریکه پراکنده می شوند.

ب: اگر در دستگاه آزمایشگاه، گاز با سرعت v به طرف باریکه حرکت کند، چه کسری از اتم ها در زمان t پراکنده می شوند؟ چگالی اتم ها را در دستگاه مختصات همراه با گاز برابر با n بگیرید.

پاسخ: $e^{-\frac{t}{\tau}}$ که در آن، برای الف: $\tau = ut\pi n(R_1+R_2)^2$ و برای ب: $\tau = (\frac{u+v}{1+\frac{uv}{c^2}})t\pi n(R_1+R_2)^2$.

- **جمع سرعت ها و تبدیلات لورنتز:** دستگاه S' با سرعت v نسبت به دستگاه S حرکت می کند.

الف: یک فوتون در دستگاه S' در مسیری با زاویه 45 درجه نسبت به محور x' حرکت می کند. زاویه حرکت این فوتون را نسبت به دستگاه

S بدست آورید .

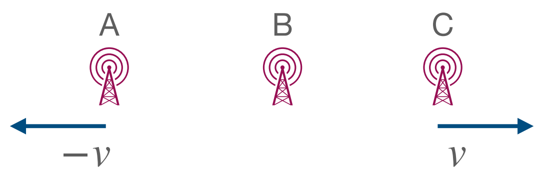
ب: قسمت الف را برای وقتی که به جای فوتون یک ذره جرم دار با سرعت u در همان زاویه حرکت می کند، تکرار کنید.

پاسخ: $\tan\theta = \frac{1}{\gamma}\frac{u\sin\theta}{u\cos\theta+v}$ $\quad \tan\theta = \frac{1}{\gamma}\frac{c\sin\theta}{c\cos\theta+v}$

- **جمع سرعت ها و اثر دوپلر** سه فرستنده رادیویی یکسان مطابق شکل (۲۴) حرکت می کنند و هر کدام علایمی با فرکانس ν_0 را در دستگاه همراه خود صادر می کنند.

الف: فرکانس علایمی که B صادر می کند در دستگاه C چقدر است؟

ب: فرکانس علایمی که A صادر می کند در دستگاه C چقدر است؟

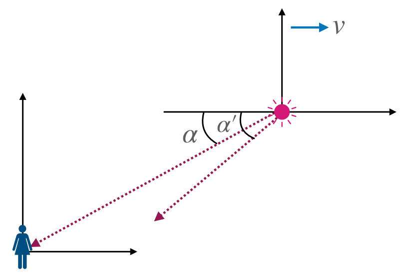


شکل ۲۴: شکل مربوط به مسئله ایستگاه های رادیویی.

پاسخ: $\nu = \nu_0\frac{c-v}{c+v}$ $\qquad \nu = \nu_0\sqrt{\frac{c-v}{c+v}}$

- **ابیراهی نسبیتی** [۲۲] فرض کنید ستاره S' نسبت به ناظر S با سرعت v دور شونده در راستای افقی حرکت میکند. ناظر پرتوی نوری که با زاویه α' از ستاره خارج شده است را در زاویه α دریافت میکند. در این سوال قصد داریم رابطه α با α' را بدست بیاوریم.

[۲۲] Relativistic aberration



الف) مولفه افقی سرعت پرتو در دستگاه S را بدست بیاورید.

ب) مولفه عمودی سرعت پرتو در دستگاه S' را بدست بیاورید.

پ) با استفاده از رابطه

$$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}, \qquad (۱۴۲)$$

رابطه بین $\frac{\alpha}{2}$ با $\frac{\alpha'}{2}$ را به دست بیاورید.

ت) α' را ثابت در نظر بگیرید. اگر v زیاد شود، α چگونه تغییر میکند؟

ث) فرض کنید ستاره نور را به صورت همسانگرد گسیل میکند. با توجه به نتیجه ای که در قسمت قبل بدست آوردید، اگر سرعت ستاره افزایش یابد پرتوهای تابش شده چگونه از نظر ما تغییر میکنند؟ آیا با شهودتان سازگار است؟ به این پدیده *Headlight effect* میگویند.

راهنمایی: با توجه به شکل ابتدای سوال، سرعت افقی پرتو در هر دو دستگاه منفی است.

■ **پارادکس دوقلوها** این مسئله نخستین بار توسط سر چارلز داروین (نه آن داروین طبیعت شناس) در سال ۱۹۵۷ طرح شده و به همان زبان هم در این جا طرح می شود. روز سال نوی ۱۹۸۴ یک فضانورد به نامِ A زمین را ترک می کند و با سرعتِ $0.8\,c$ به ستاره آلفا قنطورس [۲۳] که در فاصله چهارسال نوری از زمین واقع است می رود. پس از رسیدن به این ستاره بلافاصله برمی گردد و در روز سال نوی ۱۹۹۴ (با ساعت زمین) به زمین برمی گردد. این فضانورد برادری به نام B دارد که در زمین می ماند. این دو به هم قول می دهند که در هر روز عید، یک کارت تبریک دیجیتالی (با سرعت نور) برای همدیگر بفرستند.

[۲۳] alpha-Centauri

الف: نشان دهید که A فقط شش کارت تبریک دیجیتال برای برادرش می فرستد و حال آن که B ۱۰ کارت تبریک می فرستد.

ب: یک دیاگرام فضازمانی برای مسیر A در چارچوب زمین رسم کنید. جهان خط پیام های تبریک دیجیتالی را نیز که B می فرستد رسم کنید. مقیاس فاصله های x و ct را سال نوری بگیرید. نشان دهید که A در مسیر رفت اش تنها یک کارت تبریک دریافت می کند و ۹ کارت تبریک دیگر را در مسیر برگشت دریافت می کند.

پ: یک دیاگرام دیگر بازهم در چارچوب زمین رسم کنید و جهان خط پیام های تبریکی را که A می فرستد، مشخص کنید. نشان دهید که B در ابتدا هر سه سال (زمینی) یک کارت تبریک دریافت می کند و سپس در سال آخر سه کارت تبریک دیگر دریافت می کند و جمعا شش کارت تبریک دریافت می کند.

- **همزمانی** قطاری با سرعت v وارد ایستگاه میشود. دو بچه در ایستگاه به فاصله L از هم ایستاده اند. آن ها به طور همزمان دو سنگ به طرف قطار پرتاب میکنند، سنگ ها به قطار برخورد کرده و ردی روی بدنه آن برجای میگذارند. از دید ناظر قطار فاصله این دو فرورفتگی چقدر است؟

  پاسخ: γL

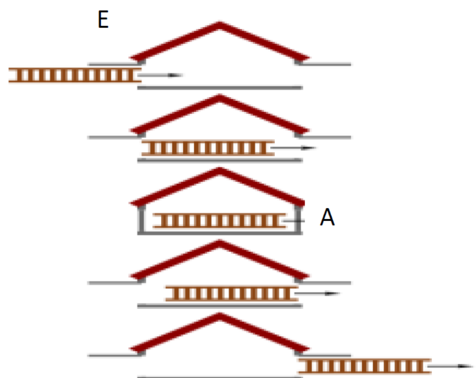
- **آزمایش مایکلسون-مورلی و نظریه باد اتری**

الف) اختلاف زمانی نظریه باد اتری برای آزمایش مایکلسون-مورلی هنگامی که یکی از بازوهای تداخل سنج موازی و دیگری عمود بر جریان اتر باشند در منابع گفته شده در درسنامه مورد بحث قرار گرفت. اختلاف زمان را برای حالتی که یکی از بازوها با زاویه θ نسبت به باد اتری و دیگری عمود بر بازوی اول باشد را حساب کنید.

(ب) اگر مشابه آزمایش مایلسون-مورلی را برای تداخل سنج امواج صوتی که در یک تونل باد که در آن باد با سرعت ثابت وزیده می شود انجام دهیم چه انتظاری از اختلاف طرح تداخلی امواج صوتی در دو حالت که بازوی موازی با سرعت باد بازوی اول و بازوی دوم باشند، باید داشته باشیم. در این سوال محاسبه نیاز نیست و توضیح و ذکر شباهت ها و در صورت وجود، ذکر تفاوت ها کافی است.

پاسخ: الف: $\delta T = \frac{v^2}{c^3}(L_2 + L_1 \cos 2\theta)$.

■ **اینشتین ـ پودولسکی و روزن و مسئله نردبان و انبارغله** فرض کنید در سال ۱۰۳۰ میلادی دو فیزیکدان به نام‌های بوریس پودولسکی و ناتان روزن دو سر یک نردبان به طول ۱ متر (طول ویژه) را گرفته اند و می خواهند با سرعت V به سمت انبار غله ای حرکت کند که در ابتدای آن نقطه E اینشتین نشسته است. طول انبار غله (طول ویژه ۱ متر) است. انتهای انبار غله دیوار مستحکمی وجود دارد (شکل زیر شماتیک است، انتهای انبار نقطه A دیوار مستحکم قرار دارد.)



الف) کمینه سرعتی را محاسبه کنید که از دید اینشتین نردبان داخل انبار غله جا بگیرد.

ب) با رسم نموار فضا_زمان مینکوفسکی از دید اینشتین نشان دهید که چرا نردبان باید در انبار غله جا بگیرد.

پ) نمودار فضا_زمان مینکوفسکی را از دید ناتان روزن که انتهای نردبان را گرفته است را رسم کنید.

ت) با محاسبه نشان دهید که چرا پودولسکی و روزن نیز باید این نتیجه را بگیرند که نردبان داخل انبار غله قرار گرفته است. اگر طول انبار غله کوچکتر از(طول ویژه ۱ متر) بود آیا هنوز نردبان در داخل انبار غله با سرعت سابق V جا می گرفت؟

■ **تبدیل شتاب:** دستگاه لخت S' با سرعت $\mathbf{u}$ نسبت به دستگاه لخت S در حال حرکت است. یک ذره در دستگاه S' سرعت $\mathbf{v}'$ و شتاب $\mathbf{a}'$ دارد.

الف: از تبدیلات سرعت ها که در متن درس آورده شده، استفاده کنید و نشان دهید که شتاب ذره در دستگاه S چنین است:

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_{\|} &= \frac{\mathbf{a}'_{\|}(1+\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}') - (\mathbf{u}\cdot\mathbf{a}'_{\|})(\mathbf{v}'_{\|}+\mathbf{u})}{\gamma(1+\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}')^3} \\
\mathbf{a}_{\perp} &= \frac{\mathbf{a}'_{\perp}(1+\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}') - (\mathbf{u}\cdot\mathbf{a}'_{\|})\mathbf{v}'_{\perp}}{\gamma^2(1+\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}')^3}.
\end{aligned} \tag{۱۴۳}$$

در این جا منظور از $\mathbf{a}_{\|}$ و $\mathbf{a}_{\perp}$ شتاب های موازی و عمود بر راستای $\mathbf{u}$ است.

ب: نشان دهید که وقتی دستگاه S' دستگاه لحظه ای همراه با ذره است، این روابط به شکل زیر ساده می شوند:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{\parallel} &= \frac{1}{\gamma^3}\mathbf{a'}_{\parallel} \\ \mathbf{a}_{\parallel} &= \frac{1}{\gamma^2}\mathbf{a'}_{\perp}. \end{aligned} \tag{۱۴۴}$$